



# Approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité. Application au développement de systèmes mécaniques de l'automobile

Anthony Hähnel

## ► To cite this version:

Anthony Hähnel. Approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité. Application au développement de systèmes mécaniques de l'automobile. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2007. Français. NNT : 2007CLF21727 . tel-00717719

**HAL Id: tel-00717719**

**<https://theses.hal.science/tel-00717719>**

Submitted on 13 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 1727  
EDSPIC : 369

Université BLAISE PASCAL - Clermont II  
École Doctorale  
Sciences Pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

# Thèse

présentée  
pour obtenir le grade de

Docteur d'Université  
(Spécialité : Génie Mécanique)

par

Anthony HÄHNEL  
Ingénieur IFMA

## Approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité

Application au développement de systèmes mécaniques de l'automobile

Soutenue publiquement le 18 janvier 2007 devant le jury :

M.	Carlos GUEDES SOARES	IST - UTL	Rapporteur
M.	Maurice LEMAIRE	LaMI - UBP & IFMA	Directeur de Thèse
M.	Frédéric PETIT	Renault s.a.s.	Examineur
M.	François RIEUNEAU	Renault s.a.s.	Examineur
M.	Serge TICHKIEWITCH	INPG	Rapporteur
M.	Bernard YANNOU	ECP	Président du jury

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI),  
Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise Pascal.

Direction de l'Ingénierie Mécanique,  
Département Fiabilité et Mise au Point Mécanique, Renault s.a.s.

*A mes Parents.*  
*A Gabrielle.*

“Sve bi to potvrđivalo gornje mišljenje onoga stranca. Pa ipak je teško pouzdano kazati u kojoj je meri to mišljenje tačno. Kao u tolikim drugim stvarima i ovde nije lako odrediti šta je uzrok a šta posledica.”

Ivo Andrić, Na Drini ćuprija.

“Tout cela pourrait confirmer ce que pensait l'étranger. Cependant, il est difficile de dire avec certitude dans quelle mesure cette appréciation est juste. Comme dans beaucoup d'autres domaines, il n'est pas facile ici de définir ce qui est la cause ou la conséquence.”

Ivo Andrić, Le Pont sur la Drina.  
Traduit du serbo-croate par Pascale Delpech.

# Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier Monsieur Maurice LEMAIRE, Professeur à l'Institut Français de Mécanique Avancée, pour m'avoir fait l'honneur de diriger mes travaux de thèse. Je suis particulièrement sensible à la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de notre collaboration scientifique commencée voilà maintenant plus de cinq ans. Nos discussions, ses conseils et son appui m'ont été d'une aide précieuse. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance.

J'en profite pour le remercier également, ainsi que Monsieur Armen DER KIUREGHIAN, Professeur à *UC BERKELEY*, et Monsieur Greg FOLIENTE, Responsable de recherche au *CSIRO - Commonwealth Scientific and Research Organisation*, pour m'avoir aidé à trouver ma voie et m'avoir incité à découvrir le métier de chercheur.

Je tiens ensuite à remercier les deux personnes qui m'ont encadré au sein de la Division de l'Ingénierie Mécanique RENAULT. Tout d'abord, j'exprime ma gratitude à François RIEUNEAU, Expert en Sécurité de Fonctionnement des Groupes Moto-Propulseurs, sans qui ces travaux de recherche n'auraient jamais vu le jour. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée et pour tous les efforts qu'il a fournis dans l'encadrement de la thèse. Je remercie également Frédéric PETIT pour son implication et ses conseils avisés qui ont grandement contribué à la réalisation et à la validation de mes travaux.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur Serge TICHKIEWITCH, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, et à Monsieur Carlos GUEDES SOARES, Professeur à l'*Instituto Superior Técnico de Lisboa*, d'avoir accepté d'exercer la fonction de rapporteur de ma thèse. Je leur sais gré d'avoir fait preuve d'opiniâtreté dans la longue épreuve que peut constituer la lecture attentive et critique de ce mémoire. Leurs appréciations sont pour moi un tremplin pour la suite de mes travaux et leur déploiement industriel.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Bernard YANNOU, Professeur à l'Ecole Centrale Paris, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. L'intérêt qu'il a manifesté dans la lecture de mon travail, les remarques et les questions qu'il a soulevées, me permettront sans nul doute d'enrichir ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

J'exprime ma vive reconnaissance à l'ensemble de la Direction de la Conception et des Technologies de l'Ingénierie Mécanique RENAULT. Je remercie plus particu-

lièrement Monsieur Patrick LETELLIER et tous les membres du Service Sûreté de Fonctionnement qu'il dirige pour leur merveilleux accueil et leur soutien inconditionnel.

Je tiens aussi à exprimer toute ma sympathie à tous les membres de l'équipe du LaMI de l'UBP et de l'IFMA, en particulier à Messieurs François DEHEEGER et Jean-Marc BOURINET avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. Mes pensées vont également à l'ensemble des élèves ingénieurs IFMA avec qui j'ai eu la chance de collaborer et qui ont apporté leur contribution à ce travail.

J'ai plaisir à remercier Messieurs Bruno SUDRET et Marc BERVEILLER d'EDF R&D ainsi que Monsieur Maurice PENDOLA, PDG de PHIMECA ENGINEERING S.A. pour nos discussions techniques enrichissantes et nos échanges constructifs au sujet des approches probabilistes en mécanique.

Je dois aussi des remerciements particuliers à Monsieur Tanguy MORO pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux et pour les recommandations, toujours précieuses, qu'il m'a données au cours de ces trois dernières années.

Je tiens également à remercier mes plus proches amis. Que ce soit depuis Paris, Frankfurt, Bijeljina, Beograd, Sydney, Melbourne, ou Dijon leur soutien partisan constitue indéniablement l'une des clefs de l'aboutissement de ce travail.

J'exprime finalement toute ma reconnaissance à ma famille et plus particulièrement à mes parents, Bernard et Lyse, qui m'ont fait confiance et qui m'ont toujours donné les moyens de réaliser mes projets, même les plus déraisonnables. Je remercie vivement Lydie pour son soutien, ses encouragements et son aide au quotidien, mais aussi pour sa patience. Bien malgré elle, les méthodes stochastiques en mécanique n'ont aujourd'hui plus aucun secret pour elle...

# Résumé

L'industrie mécanique est confrontée au problème déterminant de la conception, en contexte incertain, de systèmes toujours plus innovants et sûrs de fonctionnement. L'évaluation et l'élaboration de leur fiabilité au cours du processus de conception constituent donc des enjeux majeurs. Les challenges qu'ils suscitent nécessitent la mise en œuvre de démarches pluridisciplinaires pour assurer, dès les premières phases et jusqu'à la fin du développement d'un nouveau produit, que les différents choix de conception satisfont bien aux objectifs de fiabilité imposés par les décideurs.

D'abord, l'étude de l'état de l'art des analyses de fiabilité prévisionnelles nous conduit à distinguer les méthodes indispensables à la construction de modèles de fiabilité qualitatifs [Vil88], de leurs interprétations quantitatives de type *système sans physique* issues de la théorie de la fiabilité des systèmes [RH04] et de leurs interprétations quantitatives de type *physique sans système* issues de la théorie de la fiabilité des structures ou relevant des techniques du couplage mécano-fiabiliste [Lem05b]. Ensuite, elle montre qu'aucune d'entre elles n'accompagne l'effort de conception de manière optimale ni ne stimule parfaitement les interactions souhaitables entre les métiers de la conception et ceux de la fiabilité. Enfin, elle souligne la nécessité d'adopter une vision unifiant les interprétations *système et physique* des défaillances de dispositifs mécaniques.

De ce fait, nous développons une approche prévisionnelle par la modélisation à la fois *système et physique* du problème de fiabilité, propice au pilotage efficace de l'activité de conception fiable. Catalysant les synergies de multiples acteurs de la conception, elle tire tout le parti d'approches complémentaires issues de disciplines fiabilistes différentes et s'intègre mieux aux étapes successives du processus de conception de systèmes mécaniques [PB96].

Du point de vue académique, nous proposons la modélisation évolutive et le traitement original des scénarios de défaillance de systèmes mécaniques. Sur la base d'analyses de défaillance systèmes et qualitatives, leur interprétation à la fois logique, physique et probabiliste est formalisée par :

1. l'élaboration de la structure de scénarios quantitatifs par l'application d'une grammaire de construction empirique spécifique.
2. la modélisation probabiliste évolutive des données de conception imparfaitement connues à partir de l'ensemble de l'information disponible.
3. l'intégration en chaque nœud de tels scénarios de la représentation évolutive des phénomènes physiques par le recours aux techniques de métamodélisation.

4. la propagation de l'aléa inhérent à la réalisation de la physique de défaillance au sein de ces scénarios phénoménologiques. La caractérisation stochastique de l'ensemble des paramètres nodaux des scénarios est réalisée par l'implémentation des méthodes du chaos polynomial et de l'exponentielle d'un polynôme (*EPM*).
5. le traitement mécano-fiabiliste du modèle système et physique résultant. Il relève de la mise en œuvre des techniques traditionnelles du couplage mécano-fiabiliste et de l'introduction du concept d'analyses *FORM/SORM* de type "court-circuit". Outre la détermination de mesures de fiabilité classiques, nous proposons la construction de chaînes de facteurs d'importance. Elles identifient l'influence de chaque variable du modèle sur la réalisation des phénomènes physiques qu'elle induit et sur la fiabilité du système, à travers n'importe quel chemin de défaillance.

L'étude d'un sous-système de moteur Diesel d'automobile illustre la capacité de la méthodologie proposée à piloter les différentes étapes de conception. Elle assure la définition d'arguments d'aide au dimensionnement fiable et la construction de plans adéquats de validations ou d'améliorations de la fiabilité.

Du point de vue industriel, nos travaux de recherche visent à promouvoir l'introduction de la culture de l'incertain dans les métiers de la conception. Le développement de *RELAB*, une plateforme logicielle implémentée sous *Matlab*<sup>®</sup>, support de l'approche de fiabilité prévisionnelle suggérée, y contribue pleinement. Elle permet l'automatisation du traitement des modèles *systèmes et physiques* du problème de fiabilité qui deviennent vite lourds et fastidieux à mettre en œuvre manuellement. Elle assure la vulgarisation de l'analyse de fiabilité proposée dans le but de convaincre définitivement les acteurs de la conception industrielle, ainsi que les décideurs, de l'ensemble de son potentiel.

*Mots-clés* : Conception pour la fiabilité, Fiabilité système, Fiabilité mécanique, Physique de défaillance, Couplage mécano-fiabiliste, Propagation des incertitudes, Chaos polynomial, *FORM/SORM*, Sécurité de fonctionnement.



# Abstract

The mechanical engineering industry is dealing with the challenging issue of designing, in an uncertain context, always more innovative and reliable systems. The elaboration and the evaluation of their reliability during their design process is thus a crucial task and challenges arise. They require the implementation of multidisciplinary approaches to assure that the various design choices meet the reliability objectives defined by the decision-makers, from the start of a new product development to the end.

First, the state-of-the-art review of the preliminary reliability analyses leads us to make a distinction between the methods that are compulsory to the construction of qualitative reliability models [Vil88], their quantitative *system without physics* interpretations [RH04], and their *physical without system* quantitative interpretations [Lem05b]. It also highlights the fact that none of them accompanies the design efforts in an optimal way. They do not motivate perfectly the necessary interactions between the designers and the reliability engineers. Finally, it emphasizes the inevitability to adopt a standpoint that aims at unifying the system and the physical interpretations of the failures of mechanical devices.

As a result, we develop an approach based on *system and physical* reliability models. Such models and the products of their analysis are convenient to rule efficiently design for reliability practices. Catalysing the synergies of the various actors of an industrial design process, it takes advantage of complementary approaches that stem from different reliability disciplines. It is also better integrated into the successive stages of the design process of mechanical systems [PB96].

From the academic perspective, we propose the evolutive modeling and the original treatment of the failure scenarios of mechanical systems. Based on preliminary qualitative and system failure analyses, their quantitative interpretation combining a logical, a physical and a probabilistic viewpoint is formalized by :

1. the elaboration of the structure of the quantitative reliability model ruled by a specific empirical grammar.
2. the evolutive probabilistic modeling of the uncertain design data using all the available knowledge.
3. the integration at each node of the scenarios of an evolutive mathematical representation of the physical phenomena by use of metamodeling techniques.
4. the propagation within the phenomenological scenarios of the uncertainties inherent to the physics-of-failure realization. The stochastic characterization of

all the nodal parameters is obtained by using polynomial chaos expansions and implementing the exponential of a polynomial method (EPM).

5. the general evaluation of the resulting reliability model. It is based on the implementation of traditional structural reliability techniques as well as on the introduction of the concept of “shortcut” FORM/SORM analyses. Besides the determination of classical reliability measures, we propose the construction of chains of important factors. They identify the influence of every variable of the model, through any path of failure, on both the physical phenomena it generates and the reliability of the system.

Using the central example of a Diesel engine subsystem, we illustrate the capacity of the proposed methodology to coordinate the successive steps of an industrial design process. It enables both the definition of strong arguments to design for reliability and the elaboration of adequate reliability validation or enhancement plans.

From the industrial point of view, our research work aims at promoting the introduction of the culture of uncertainty modeling within the context of design processes. The development of RELAB totally contributes to it. Actually, this software platform implemented in the Matlab<sup>®</sup> environment orchestrates the suggested reliability approach. It allows the automatic evaluation of the associated complex *system and physical* reliability models that become rapidly prohibitive to manipulate and to evaluate manually. As a result, it participates in assuring the popularization of the proposed reliability frameworks in an attempt to convince definitively the actors of an industrial design process that they should benefit more from its potential.

*Keywords* : Design for reliability, System reliability, Mechanical reliability, Physics-of-failure modeling, Uncertainty propagation, Polynomial chaos, FORM/SORM, RAMS.

# Avertissement

La taille conséquente de ce projet de thèse ne doit en aucun cas rebuter la curiosité de ses lecteurs potentiels.

A cet effet, nous avons conçu un guide de lecture offrant plusieurs circuits de visite selon les attentes, les sensibilités et les compétences de chacun.

En fait, outre un itinéraire de lecture synthétique et un chemin de visite exhaustif, nous avons aménagé de multiples visites guidées, privilégiant chacune le point de vue de l'un des acteurs d'un processus de conception fiable de systèmes mécaniques, à savoir :

- l'ingénieur concepteur et son expertise des méthodologies de la conception,
- l'ingénieur fiabiliste et son expérience de l'analyse des défaillances et de la modélisation des problèmes de fiabilité,
- l'ingénieur mécanicien ou physicien et sa connaissance des phénomènes physiques régissant le comportement de systèmes mécaniques,
- l'ingénieur statisticien et sa capacité à faire parler les données pour une prise en compte plus efficace des incertitudes de caractérisation des paramètres de conception et des phénomènes physiques méconnus,
- l'ingénieur probabiliste et sa maîtrise des techniques du calcul stochastique à des fins d'évaluation de la fiabilité de systèmes mécaniques,
- le décideur, dont le principal souci est de prendre une décision quant à la validation de la conception sur la base de la meilleure information possible.

Ce guide de lecture est explicité en détail dans l'introduction générale de ce document (Chapitre 1 section 1.4).

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>x</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xvi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	2
1.3 Objectifs des travaux de recherche . . . . .	4
1.4 Organisation du mémoire et circuits de lecture . . . . .	4
<b>2 Synthesis : Probabilistic and physical modeling of mechanical systems failure scenarios to design for reliability</b>	<b>11</b>
2.1 Interactions between the design process and reliability analyses . . . .	13
2.1.1 Conceptual design . . . . .	13
2.1.2 Embodiment design . . . . .	14
2.1.3 Detail design . . . . .	15
2.1.4 System & physical modeling of failures to design for reliability	15
2.2 Physical and probabilistic system reliability model . . . . .	16
2.2.1 Qualitative and quantitative failure mechanism scenarios . . .	17
2.2.2 Physical and mechanical evolutive modeling . . . . .	19
2.2.3 Stochastic modeling of the design variables . . . . .	21
2.2.4 Uncertainty aggregation within the failure mechanism tree . . .	23
2.3 Reliability evaluation, elaboration and optimization . . . . .	27
2.3.1 Shortcut FORM/SORM analysis strategies . . . . .	27
2.3.2 Estimation of reliability measures . . . . .	28
2.3.3 Chains of importance factors and sensitivity measures . . . . .	30
2.3.4 Design enhancement using reliability and sensitivity analyses .	32
2.4 Summary and conclusions . . . . .	35
<b>3 Exemple conducteur</b>	<b>37</b>
3.1 Principes de fonctionnement d'un moteur Diesel . . . . .	37
3.1.1 Moteurs conventionnels et alternatives . . . . .	37
3.1.2 Le cycle thermodynamique Diesel à 4 temps . . . . .	39
3.1.3 Spécificités de la combustion Diesel . . . . .	40

3.1.4	Les émissions polluantes et leur post-traitement . . . . .	41
3.2	Périmètres étudiés et éléments de modélisation . . . . .	42
3.2.1	Description générale . . . . .	42
3.2.2	Remplissage en air de la chambre de combustion . . . . .	43
3.2.3	Combustion et pression de combustion maximum . . . . .	45
3.2.4	Grippage par déformations de l'axe de piston . . . . .	46
3.2.5	Etanchéité aux gaz au niveau du joint de culasse . . . . .	48
3.3	Conclusion du chapitre . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Limites des modélisations <i>système sans physique et physique sans système</i> en conception pour la fiabilité</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	54
4.2	Notion et concept de fiabilité prévisionnelle . . . . .	54
4.2.1	Une définition technique et théorique de la fiabilité . . . . .	55
4.2.2	Définitions pratiques et branches d'application . . . . .	55
4.2.3	Fiabilité prévisionnelle, expérimentale et opérationnelle . . . . .	56
4.2.4	Analyses de défaillance et fiabilité prévisionnelle . . . . .	57
4.3	Analyses de fiabilité qualitatives . . . . .	59
4.4	Interprétations quantitatives <i>systèmes sans physique</i> . . . . .	60
4.4.1	Modèles de fiabilité sans physique des composants d'un système	60
4.4.2	Des composants sans physique aux systèmes sans physique . .	61
4.4.3	Conclusion . . . . .	69
4.5	Interprétations quantitatives <i>physiques sans système</i> . . . . .	70
4.5.1	Formulation générale au niveau d'un composant . . . . .	71
4.5.2	Couplage mécano-fiabiliste statique . . . . .	72
4.5.3	Fiabilité des structures dépendantes du temps . . . . .	74
4.5.4	Limites des interprétations systèmes classiques en fiabilité mécanique . . . . .	75
4.5.5	Conclusion . . . . .	76
4.6	Interactions avec le processus de conception de systèmes mécaniques .	76
4.6.1	Fiabilité et processus de conception systématique . . . . .	76
4.6.2	Conception pour la fiabilité : perspectives et enjeux d'évolution	78
4.7	Conclusion du chapitre : vers une démarche fiabiliste multidisciplinaire, système et physique . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Scénarios de défaillance phénoménologiques et systèmes</b>	<b>82</b>
5.1	Introduction . . . . .	83
5.2	Analyse de défaillance qualitative et physique . . . . .	83
5.2.1	Une démarche générique et systématique . . . . .	83
5.2.2	Elaboration de scénarios de défaillance physiques qualitatifs . .	87
5.3	Structure des scénarios physiques quantitatifs . . . . .	90
5.3.1	Intérêts de la décomposition physique des scénarios . . . . .	91
5.3.2	Grammaire de décomposition - critères de granularité . . . . .	95
5.3.3	Définition formelle . . . . .	97
5.4	Exemple : fuite de gaz au joint de culasse . . . . .	100
5.4.1	Définition du périmètre matériel de l'étude . . . . .	100

5.4.2	Eléments de construction des scénarios de défaillance physiques qualitatifs . . . . .	101
5.4.3	Aperçu de la structure des scénarios de défaillance physiques quantitatifs . . . . .	102
5.5	Conclusion du chapitre . . . . .	106
5.5.1	Synthèse . . . . .	106
5.5.2	Perspectives . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Modélisation des paramètres de conception et des comportements physiques</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	108
6.2	Modèles probabilistes des paramètres de conception . . . . .	108
6.2.1	Concepts d'incertitudes aléatoires et épistémiques . . . . .	109
6.2.2	Justification d'une représentation probabiliste de l'incertain . . . . .	111
6.2.3	Modélisation classique par ajustement de lois . . . . .	118
6.2.4	Modélisation Bayésienne . . . . .	120
6.2.5	Indice de représentativité . . . . .	123
6.2.6	Exemples : serrage culasse et module d'Young de l'axe de piston . . . . .	123
6.2.7	Conclusion . . . . .	127
6.3	Modélisation évolutive des comportements physiques . . . . .	127
6.3.1	Modélisation physique et expertise . . . . .	128
6.3.2	Concept et techniques classiques de métamodélisation . . . . .	130
6.3.3	Indice de représentativité des modèles physiques . . . . .	135
6.3.4	Exemple : phénomènes de remplissage et de combustion . . . . .	136
6.3.5	Conclusion . . . . .	137
6.4	Conclusion du chapitre . . . . .	138
6.4.1	Synthèse . . . . .	138
6.4.2	Perspectives . . . . .	138
<b>7</b>	<b>Méthodologie de propagation de l'aléa et des incertitudes</b>	<b>140</b>
7.1	Introduction . . . . .	141
7.1.1	Problématique . . . . .	141
7.1.2	Synthèse de l'état de l'art . . . . .	141
7.1.3	Schéma synoptique de la procédure proposée . . . . .	143
7.2	Approximation des $X_k^{(l)}$ par des polynômes de chaos . . . . .	144
7.2.1	Définition . . . . .	144
7.2.2	Méthode de régression . . . . .	145
7.2.3	Choix du plan d'expériences . . . . .	146
7.2.4	Conclusion . . . . .	147
7.3	Densité de probabilité et loi de répartition des $X_k^{(l)}$ . . . . .	148
7.3.1	Fonction de densité <i>EPM</i> des $X_k^{(l)}$ . . . . .	148
7.3.2	Fonction de distribution <i>EPM</i> des $X_k^{(l)}$ . . . . .	151
7.3.3	Conclusion . . . . .	151
7.4	Matrice de corrélation des éléments du vecteur $\mathbf{X}^{(l)}$ . . . . .	152
7.4.1	Introduction . . . . .	152

7.4.2	Principes de construction . . . . .	153
7.4.3	Conclusion . . . . .	154
7.5	Exemples . . . . .	154
7.5.1	Remplissage en $O_2$ de la chambre de combustion . . . . .	154
7.5.2	Pression de combustion maximale . . . . .	156
7.6	Conclusion du chapitre . . . . .	157
7.6.1	Synthèse . . . . .	157
7.6.2	Perspectives . . . . .	158
<b>8</b>	<b>Evaluation, mise à jour et validation du modèle de fiabilité</b>	<b>160</b>
8.1	Introduction . . . . .	161
8.2	Stratégies d'analyse . . . . .	161
8.2.1	Analyses niveau par niveau . . . . .	161
8.2.2	Analyses <i>FORM/SORM</i> par court-circuit montant . . . . .	162
8.2.3	Analyses <i>FORM/SORM</i> par court-circuit descendant . . . . .	163
8.3	Estimation de mesures de la fiabilité . . . . .	163
8.3.1	Probabilités de défaillance et indices de fiabilité . . . . .	163
8.3.2	Corrélations des fonctions de performance et des états limites . . . . .	164
8.3.3	Probabilités conditionnelles . . . . .	167
8.3.4	Exemple : déformations d'un axe de piston . . . . .	170
8.3.5	Conclusion . . . . .	171
8.4	Chaînes de facteurs d'importance - arbres d'influence . . . . .	172
8.4.1	Facteurs nodaux de sensibilité . . . . .	172
8.4.2	Construction de chaînes de facteurs d'importance . . . . .	173
8.4.3	Exemples . . . . .	181
8.4.4	Conclusion . . . . .	185
8.5	Validation du modèle de fiabilité et optimisation de la conception . . . . .	186
8.5.1	L'analyse de fiabilité au service de la conception . . . . .	186
8.5.2	Exemple de l'axe de piston . . . . .	187
8.5.3	Conclusion . . . . .	191
8.6	Conclusion du chapitre . . . . .	191
8.6.1	Synthèse . . . . .	191
8.6.2	Perspectives . . . . .	192
<b>9</b>	<b>RELAB Software</b>	<b>193</b>
9.1	Introduction . . . . .	194
9.2	Principe général de fonctionnement . . . . .	195
9.2.1	Organisation et structure . . . . .	195
9.2.2	Organigramme synoptique de fonctionnement . . . . .	196
9.3	Définition de la structure des scénarios de défaillance . . . . .	197
9.4	Définition stochastique des paramètres de conception . . . . .	199
9.5	Définition des phénomènes physiques nodaux . . . . .	201
9.6	Définition des analyses mécano-fiabilistes . . . . .	202
9.7	Visualisation, exploitation et stockage des résultats . . . . .	204
9.8	Conclusion du chapitre . . . . .	206
9.8.1	Synthèse . . . . .	206

9.8.2	Voies de progrès... en cours d'implémentation . . . . .	206
9.8.3	Voies de progrès... en cours de réflexion . . . . .	207
<b>10</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>208</b>
10.1	Synthèse . . . . .	208
10.2	Perspectives . . . . .	210
10.2.1	Au niveau des différents maillons de la méthodologie proposée .	210
10.2.2	Au niveau de la méthodologie dans son ensemble . . . . .	212
	<b>Bibliographie</b>	<b>213</b>
<b>A</b>	<b>Notations</b>	<b>227</b>
A.1	Vecteurs, matrices et opérateurs . . . . .	227
A.2	Grandeurs aléatoires . . . . .	227
A.3	Modèles de fiabilité <i>physiques sans système</i> . . . . .	228
A.4	Modèles de fiabilité <i>systèmes sans physique</i> . . . . .	228
A.5	Scénarios de défaillance phénoménologiques probabilisés . . . . .	229
A.6	Abréviations . . . . .	230
A.6.1	Fiabilité & sûreté de fonctionnement . . . . .	230
A.6.2	Méthodologie de la conception . . . . .	231
A.6.3	Moteurs . . . . .	231
A.6.4	Divers . . . . .	231
<b>B</b>	<b>Modélisations <i>système sans physique</i> et <i>physique sans système</i> du problème de fiabilité : mesure-t-on la même chose ?</b>	<b>232</b>
B.1	Introduction . . . . .	232
B.2	Mesures de fiabilité classiques issues de modèles <i>systèmes sans physique</i>	233
B.2.1	Introduction . . . . .	233
B.2.2	Fiabilité $R(t)$ et distribution du temps à la défaillance $T$ . . .	233
B.2.3	Taux de défaillance . . . . .	234
B.2.4	Fiabilité et sûreté de fonctionnement . . . . .	235
B.3	Mesures de fiabilité classiques issues de modèles <i>physiques sans système</i>	237
B.3.1	Introduction . . . . .	237
B.3.2	Notion d'état limite et de fonction de performance . . . . .	237
B.3.3	Probabilité de défaillance instantanée . . . . .	238
B.3.4	Probabilité de défaillance cumulée . . . . .	238
B.3.5	Franchissements et taux de franchissements . . . . .	239
B.4	Synthèse – Analogies des différentes mesures . . . . .	240
B.5	Conclusion . . . . .	242
<b>C</b>	<b>Approximation de variables aléatoires quelconques</b>	<b>243</b>
C.1	Introduction . . . . .	243
C.2	Identification exacte de la loi . . . . .	244
C.3	Simulation de Monte Carlo . . . . .	244
C.4	Méthode <i>FORM</i> . . . . .	245
C.5	Méthodes de moments . . . . .	246



C.5.1	Famille des distributions de Pearson . . . . .	246
C.5.2	Famille des distributions de Johnson . . . . .	247
C.5.3	Séries de Gram-Charlier . . . . .	249
C.5.4	Exponentielle d'un polynôme ( <i>EPM</i> ) . . . . .	250
C.5.5	Transformation de Winterstein . . . . .	253
C.6	Fonctions <i>B</i> -splines et estimation Bayésienne . . . . .	255
C.6.1	Approximation de densités par des fonctions <i>B</i> -splines . . . . .	255
C.6.2	Actualisation Bayésienne . . . . .	256
C.7	Développement sur la base d'un chaos polynomial . . . . .	258
C.7.1	Méthode de projection . . . . .	259
C.7.2	Méthode de collocation et de régression . . . . .	259
C.8	Conclusion . . . . .	261
<b>D</b>	<b>Implémentation du chaos polynomial [SDK00]</b>	<b>262</b>
D.1	Définition du chaos polynomial . . . . .	262
D.2	Polynômes d'Hermite unidimensionnels . . . . .	262
D.3	Implémentation récursive du chaos polynomial $\Psi_\alpha$ . . . . .	263
D.4	Moments statistiques d'une variable développée sur un chaos polynomial	265
<b>E</b>	<b>Méthodes classiques d'analyse de fiabilité des structures[Lem05b]</b>	<b>266</b>
E.1	Introduction . . . . .	266
E.2	Approche usuelle par indice de fiabilité . . . . .	267
E.2.1	Transformation isoprobabiliste . . . . .	267
E.2.2	Recherche du point de conception et indice de fiabilité $\beta$ . . . . .	270
E.2.3	<i>FORM</i> . . . . .	271
E.2.4	<i>SORM</i> . . . . .	272
E.2.5	Simulation conditionnelle - Tirages d'importance . . . . .	273
E.3	Produits de l'analyse de fiabilité . . . . .	275
E.3.1	Facteurs de sensibilité mécanique . . . . .	275
E.3.2	Cosinus directeurs . . . . .	276
E.3.3	Sensibilité de $\beta$ aux variables aléatoires physiques $\mathbf{X}$ . . . . .	277
E.3.4	Sensibilité de $\beta$ aux paramètres $\boldsymbol{\theta}_f$ des lois des $X_i$ . . . . .	277
E.3.5	Sensibilité de $\beta$ aux paramètres $\boldsymbol{\theta}_G$ de $G(\mathbf{x})$ . . . . .	279
E.3.6	Sensibilité de la probabilité de défaillance $P_f$ . . . . .	280
E.3.7	Elasticités des mesures de fiabilité $\beta$ et $P_f$ . . . . .	280
E.4	Conclusion . . . . .	280

# Table des figures

1.1	Circuit de lecture essentielle et synthétique. . . . .	5
1.2	Circuit de lecture complet pour les lecteurs les plus endurants. . . . .	5
1.3	Circuit de lecture spécifique aux concepteurs de systèmes mécaniques. . . . .	6
1.4	Circuit de lecture dédié aux ingénieurs fiabilistes. . . . .	6
1.5	Circuit de lecture propre aux ingénieurs statisticiens. . . . .	7
1.6	Circuit de lecture spécifique aux mécaniciens et spécialistes de la physique. . . . .	7
1.7	Circuit de lecture dédié aux ingénieurs probabilistes. . . . .	8
1.8	Circuit de lecture propre aux décideurs. . . . .	8
2.1	Synoptic scheme of the central automotive engine example. . . . .	12
2.2	Reliability analyses during the design stage of mechanical systems. . . . .	13
2.3	Interactions between the proposed methodology and the design process. . . . .	16
2.4	Overview of the proposed reliability analysis framework. . . . .	17
2.5	Idealized structure of the failure scenarios related to the gas sealing criteria. . . . .	18
2.6	Physical models evolution with respect to the available knowledge. . . . .	21
2.7	Evolutionary modeling of the design parameter uncertainties. . . . .	22
2.8	Piston pin Young modulus iterative stochastic models and representativeness. . . . .	23
2.9	Probability density function of the maximum combustion pressure $P_{max}$ . . . . .	26
2.10	Reliability analysis strategy schemes. . . . .	27
2.11	Gas sealing quality : chain of importance factors (%). . . . .	31
2.12	Evolution of the piston pin reliability with respect to the seizing criteria. . . . .	33
2.13	Elasticities of $\beta^{(bending)}$ after the first design proposition. . . . .	33
3.1	Exemple d'architecture de moteur Diesel. . . . .	38
3.2	Les 4 temps du cycle thermodynamique d'un moteur Diesel. . . . .	40
3.3	<i>Swirl</i> . . . . .	41
3.4	Schéma simplifié de l'exemple global considéré. . . . .	42
3.5	Illustration du circuit d'admission d'air d'un moteur Diesel. . . . .	43
3.6	Vue simplifiée d'un piston et de son axe. . . . .	46
3.7	Assemblage Culasse / Joint de culasse / Carter-cylindres. . . . .	48
3.8	Eléments de modélisation d'un joint de culasse. . . . .	49
4.1	Processus de conception et analyses de fiabilité classiques. . . . .	53

4.2	Processus itératif d'une analyse de fiabilité prévisionnelle. . . . .	58
4.3	Architectures de systèmes acceptant une formulation directe de la fiabilité. . . . .	62
4.4	Graphe d'états d'un système élémentaire à un composant à deux états. . . . .	67
4.5	Les acteurs de la conception fiable et leurs interactions. . . . .	80
4.6	Schéma synoptique de l'approche proposée. . . . .	81
5.1	Elaboration de la structure des scénarios physiques et quantitatifs. . . . .	82
5.2	Etapes de l'analyse de défaillance qualitative et physique exploitée. . . . .	84
5.3	Formalisme classique d'une APR. . . . .	85
5.4	Formalisme classique d'une AMDEC. . . . .	86
5.5	Etanchéité aux gaz au joint de culasse - Scénarios de défaillance physiques qualitatifs (décomposition simplifiée et volontairement incomplète). . . . .	89
5.6	Fonction de transfert globale "boîte noire" ou décomposition en fonctions de transfert intermédiaires ? . . . . .	91
5.7	Fuite de gaz au joint de culasse : structure des scénarios physiques (1). . . . .	103
5.8	Fuite de gaz au joint de culasse : structure des scénarios physiques (2). . . . .	104
5.9	Fuite de gaz au joint de culasse : structure des scénarios physiques (3). . . . .	105
6.1	Modèle de simulation physique et probabiliste de scénarios de défaillance. . . . .	107
6.2	Evolution de la connaissance au cours du processus de conception. . . . .	108
6.3	Classification des types d'incertitudes (d'après [MV05]). . . . .	110
6.4	Exemple d'intervalle. . . . .	112
6.5	Exemples de fonctions de densité de probabilité. . . . .	113
6.6	Exemples de fonctions d'appartenance. . . . .	114
6.7	Histogramme de l'échantillon d'observations de $T_{pose}$ . . . . .	124
6.8	Ajustement de la loi de $T_{pose}$ par maximum de vraisemblance. . . . .	125
6.9	Interprétation graphique du test de Kolmogorov-Smirnov pour $T_{pose}$ . . . . .	125
6.10	Modélisation Bayésienne évolutive de $E$ et son niveau de représentativité. . . . .	126
6.11	Evolution de la connaissance des phénomènes et de leur modélisation. . . . .	129
6.12	Processus générique de construction d'un métamodèle. . . . .	130
6.13	Aperçu des techniques classiques de métamodélisation. . . . .	131
7.1	Construction d'un modèle de fiabilité système, physique et probabiliste. . . . .	140
7.2	Procédure de passage probabiliste d'un niveau $l$ au niveau supérieur $l - 1$ . . . . .	143
7.3	Fonctions de densité chaos polynomial et $EPM$ de $R_{O_2}$ . . . . .	155
7.4	Fonctions de densité chaos polynomial et $EPM$ de $P_{max}$ . . . . .	157
8.1	Analyse mécano-fiabiliste système de scénarios de défaillance. . . . .	160
8.2	Stratégies d'analyse mécano-fiabiliste. . . . .	162
8.3	Un premier exemple de scénario théorique. . . . .	181
8.4	Un deuxième exemple de scénario théorique. . . . .	183
8.5	Extrait de la chaîne d'importance relative au défaut d'étanchéité aux gaz. . . . .	185
8.6	Evolution de la fiabilité de l'axe de piston. . . . .	188
8.7	Elasticités de $\beta_{flexion}^{(l)}$ après la première itération de conception. . . . .	189
9.1	<i>RELAB : Mechanical Systems Reliability ELABoration using Matlab<sup>®</sup></i> . . . . .	193

9.2	Fenêtre d'accueil de la plateforme <i>RELAB</i> . . . . .	194
9.3	Organigramme schématique de fonctionnement de <i>RELAB</i> . . . . .	197
9.4	Initialisation d'un projet. . . . .	197
9.5	Liste des projets disponibles dans la base de données. . . . .	198
9.6	Création d'une nouvelle architecture. . . . .	198
9.7	Définition du nombre de variables à chaque niveau $l$ . . . . .	199
9.8	Initialisation de la définition des variables aléatoires élémentaires. . . .	199
9.9	Définition de la matrice de corrélation des variables aléatoires d'entrée. .	200
9.10	Fenêtre graphique de visualisation des variables aléatoires. . . . .	200
9.11	Définition des paramètres d'entrée et de sortie d'un modèle mécanique. .	201
9.12	Options du calcul de sensibilité par chaos polynomial et <i>EPM</i> . . . . .	203
9.13	Options propres aux simulations de Monte Carlo et à l'évaluation des coefficients de corrélation. . . . .	203
9.14	Fenêtre de visualisation et de validation pour sauvegarde des résultats. .	205
B.1	Représentation des <i>MTTF</i> , <i>MUT</i> , <i>MDT</i> et <i>MTBF</i> . . . . .	236
D.1	Correspondance entre un tirage de boules et $\alpha$ pour $(M = 4, p = 2)$ . . .	264
D.2	Génération récursive du chaos polynomial $(M = 4, p = 2)$ . . . . .	264
E.1	Illustration de l'approximation <i>FORM</i> dans l'espace standard. . . . .	272
E.2	Illustration de l'approximation <i>SORM</i> dans l'espace standard. . . . .	273
E.3	Simulation de Monte Carlo standard et tirages d'importance. . . . .	274

# Liste des tableaux

2.1	Combustion phenomenon evolutive modeling. . . . .	21
2.2	Probability of failure and reliability index. . . . .	28
2.3	Events correlations and conditional probabilities of occurrence. . . . .	30
2.4	Reliability level at iteration 1. . . . .	32
2.5	Reliability level at iteration 2. . . . .	34
2.6	Reliability level at iteration 7. . . . .	34
3.1	Paramètres impactant le remplissage en air des cylindres à l'ordre 1. . . . .	44
3.2	Paramètres impactant le phénomène de combustion à l'ordre 1. . . . .	45
3.3	Paramètres impactant à l'ordre 1 les déformations de l'axe de piston. . . . .	46
3.4	Paramètres intermédiaires de conception de l'axe de piston. . . . .	47
3.5	Caractéristiques thermo-mécaniques pour la modélisation de l'assemblage. . . . .	50
5.1	Passage du niveau (0) au niveau (1). . . . .	98
5.2	Passage du niveau (1) au niveau (2). . . . .	99
5.3	Passage du niveau ( $l$ ) au niveau ( $l + 1$ ). . . . .	100
6.1	Résidu du test d'ajustement de maximum de vraisemblance de $T_{pose}$ . . . . .	124
6.2	Evolution de la modélisation du phénomène de remplissage. . . . .	137
6.3	Evolution de la modélisation du phénomène de combustion. . . . .	137
7.1	Premiers moments de $R_{O_2}$ . . . . .	155
7.2	Coefficients de corrélation de $R_{O_2}$ et des paramètres d'entrée. . . . .	156
7.3	Premiers moments de $P_{max}$ . . . . .	157
7.4	Coefficients de corrélation de $P_{max}$ et des paramètres d'entrée. . . . .	158
8.1	Déformations de l'axe de piston : probabilités de défaillance marginales. . . . .	171
8.2	Déformations de l'axe de piston : corrélation des états limites. . . . .	171
8.3	Déformations de l'axe de piston : défaillance séries/parallèles. . . . .	171
8.4	Déformations de l'axe de piston : probabilités conditionnelles. . . . .	172
8.5	Facteurs d'importance mécaniques et fiabilistes nodaux. . . . .	173
8.6	Tableau récapitulatif des transformations de niveau en niveau. . . . .	175
8.7	Etats limites intermédiaires et terminaux dans l'espace normal standard. . . . .	176
8.8	Fiabilité de l'axe de piston après la première itération de conception. . . . .	188
8.9	Fiabilité de l'axe de piston après la deuxième itération de conception. . . . .	190
8.10	Fiabilité de l'axe de piston après la septième itération de conception. . . . .	190

---

B.1	Définition des $MTTF$ , $MUT$ , $MDT$ et $MTBF$ . . . . .	236
B.2	Analogies des mesures de fiabilité sissues des modélisations <i>système sans physique</i> et <i>physique sans système</i> . . . . .	242
C.1	Famille des distributions de Pearson. . . . .	247

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

Les préoccupations de l'industrie pour les problématiques de fiabilité et de sûreté de fonctionnement des systèmes mécaniques, même si elles ne datent bien entendu pas d'aujourd'hui, revêtent à l'heure actuelle un caractère tout à fait essentiel. L'exemple du secteur automobile est significatif. En effet, dès 1899, un décret national ouvrait la voie à un corps de règles détaillées et adaptées à l'automobile couvrant déjà des prescriptions relatives à la construction des véhicules et aux autorisations requises pour leur mise en circulation [Sam98]. Ces prescriptions sur la performance, la fiabilité et le respect de l'environnement ont évolué au fur et à mesure de l'essor de l'industrie automobile jusqu'à se décliner sous la forme de multiples réglementations contraignant plus ou moins fortement l'effort de conception. Au cours de ces dernières années, un certain nombre d'aspects très divers, liés essentiellement à l'évolution même de l'activité industrielle, imposent de nouvelles contraintes au niveau de la conception des systèmes mécaniques. En poursuivant avec l'exemple de l'automobile, ceux-ci se manifestent, entre autres, à travers les trois considérations suivantes :

1. La globalisation du marché, que l'on observe depuis quelques années, renforce l'importance de la fiabilité et de la robustesse de systèmes et de composants qui sont amenés à évoluer dans des environnements divers entre les mains d'utilisateurs aux profils variés. Par exemple, un même véhicule doit être aujourd'hui en mesure de fonctionner avec les mêmes objectifs de fiabilité, aussi bien sous la chaleur et sur les longues pistes rocailleuses d'Iran que sous les températures parfois polaires et sur les routes de Scandinavie.
2. A cette problématique s'ajoute celle d'un contexte économique toujours plus compétitif, où les temps ainsi que les coûts de développement, de production et d'exploitation doivent diminuer, alors que les exigences de qualité et de fiabilité ne cessent d'augmenter. Il est donc essentiel de mettre en place des actions de validation de la fiabilité et les actions correctives associées dès les phases amont du développement. Leur but est de positionner rapidement la conception par rapport à ces différentes exigences en préconisant des solutions à même d'atteindre, au mieux, les diverses prestations attendues.
3. Enfin, alors que les véhicules deviennent de plus en plus complexes pour des

raisons de prestation, on constate une pression grandissante de la société pour des produits de plus en plus sûrs. Une série de nouvelles réglementations impose aux constructeurs de caractériser et de prévenir l'ensemble des risques liés aux véhicules mis sur le marché. En outre, les utilisateurs attendent un niveau de fiabilité toujours supérieur aux modèles précédents.

Ces considérations ne se limitent pas uniquement au domaine de l'automobile. L'ensemble des productions industrielles est concerné comme l'atteste la récente directive européenne relative à la responsabilité du produit<sup>1</sup>. Celle-ci précise les conditions dans lesquelles les industriels doivent prévenir tout problème occasionné par une défaillance quelconque de leurs produits, dans la mesure où celle-ci est raisonnablement prévisible.

L'évaluation et l'élaboration de la fiabilité au cours du processus de conception de systèmes mécaniques complexes constituent donc des enjeux majeurs. Les analyses prévisionnelles de fiabilité et les analyses des risques induits par de possibles défaillances constituent des outils efficaces pour la définition d'une vision claire des risques potentiels liés à l'utilisation de produits industriels destinés à la consommation. Elles font aussi partie des contre-mesures indispensables à la disposition des industriels et des concepteurs (i) pour la compréhension et le traitement des risques induits par l'utilisation de systèmes mécaniques complexes (ii) pour l'élimination ou la minimisation des effets indésirables que pourrait percevoir le client.

Il est aujourd'hui nécessaire de veiller à ce que les méthodes évoluent continuellement afin de demeurer compatibles avec les niveaux d'exigence croissants et d'être en mesure de valider les choix de conception de plus en plus rapidement et toujours plus en amont dans la phase de développement d'un produit [SP03]. Dans le contexte du développement de systèmes mécaniques, pour assurer la définition de spécifications pertinentes d'objectifs de fiabilité [ØMR04], pour concevoir pour la fiabilité, les analyses classiques doivent s'adapter et mieux s'intégrer à un effort de conception nécessairement piloté par une ingénierie concourante [Boc98]. En outre, si la conception de nouveaux produits doit nécessairement passer par un effort d'innovation, les progrès des dernières années en matière de conception se caractérisent également par l'essor considérable des outils de modélisation. En conséquence, le développement de méthodologies de prévision et d'élaboration de la durabilité et de la fiabilité de systèmes mécaniques, reposant sur le calcul et la simulation numérique, doit aussi en profiter.

## 1.2 Problématique

Le thème de la recherche s'inscrit ainsi dans une perspective de conception fiable des systèmes mécaniques. Le concept de fiabilité traduit en fait l'aptitude d'un dispositif (un composant, un système,...) à assurer sa fonction dans des conditions données d'utilisation  $c_1, c_2, \dots$ , pour une période  $t$  donnée. Il est formalisée moyen d'une fonction  $R(t) = \Pr(T \geq t | c_1, c_2, \dots)$  mesurant la probabilité qu'une durée de vie spécifiée  $T$  soit supérieure à une durée de fonctionnement donnée sachant les conditions d'utilisation  $c_1, c_2, \dots$ .

---

<sup>1</sup>Directive 2001/95/CE du Parlement Européen et du Conseil des Communautés du 3 décembre 2001 relative à la sécurité générale des produits, Journal Officiel des Communautés Européennes, 15 janvier, 2002.



D'un côté, les outils et les méthodes issus de la théorie de la fiabilité des systèmes [RH04] permettent l'obtention et le traitement de modèles *systèmes sans physique* de la fiabilité, aussi bien statiques que dynamiques. Ils visent essentiellement à prévoir le niveau de fiabilité du système considéré ou encore à allouer son objectif de fiabilité global au niveau de ses différents constituants. Ils sont généralement bien adaptées à l'étude de systèmes pour lesquels le fonctionnement des différents composants peut être décrit de manière simplifiée par une interprétation logique binaire du type "marche" ou "ne marche pas". En revanche, ces représentations, que nous qualifions de haut niveau, ne reposent pas sur une considération fine de la physique de défaillance. Elles ne sont pas véritablement efficaces pour prendre en compte les défaillances de systèmes mécaniques généralement progressives, résultant de dégradations graduelles ou de la mauvaise spécification de plusieurs paramètres dimensionnant le système vis-à-vis de sa fiabilité. Elles ne permettent pas non plus d'établir un lien direct entre la fiabilité des systèmes et les paramètres physiques qui les dimensionnent.

De l'autre côté, les outils du couplage mécano-fiabiliste développés dans le cadre de la théorie de la fiabilité des structures permettent d'aborder le dimensionnement fiable de systèmes et composants mécaniques dans un incertain<sup>2</sup> modélisé par des variables aléatoires [Lem05b]. Ils s'appuient d'abord sur une description du comportement physique par la modélisation numérique et sur la prise en compte des incertitudes sur la caractérisation des paramètres de conception. Ensuite, ils réalisent le traitement probabiliste d'une fonction de performance associée à une règle de dimensionnement qui traduit un équilibre de type "contrainte – résistance". Deux catégories d'études sont classiquement menées. Les analyses de sensibilité permettent d'évaluer la variabilité de la réponse en fonction de celle des paramètres d'entrée. Les analyses de fiabilité assurent, quant à elles, l'estimation de probabilités de défaillance, d'indices de fiabilité et l'évaluation de l'influence des paramètres de conception sur ces mesures de fiabilité. Toutefois, le caractère *système* des défaillances ainsi que la dimension multi-scénarios des modes de défaillance des composants ne sont pas abordés. Cette démarche conduit, avant tout, à la modélisation *physique sans système* du problème de fiabilité.

Ces approches, complémentaires, sont issues de disciplines fiabilistes différentes. L'enjeu consiste à montrer comment profiter de leur mise en commun, en faisant pénétrer la physique dans les modèles de fiabilité systèmes et en introduisant l'aléa dans sa réalisation. Autrement dit, l'objectif est de tirer tout le parti possible d'une analyse de défaillance système dans laquelle les événements ou les caractéristiques élémentaires de conception sont des réalisations particulières de processus mécaniques plongés dans l'incertain. Une telle approche vise à expliciter le rôle et le poids des variables intervenant à chaque niveau d'un processus de défaillance ou de dégradation des performances, pour finalement en déduire celles qui sont critiques, celles sur lesquelles il faudra faire porter, de manière prioritaire, l'effort d'identification en conception et le contrôle de fabrication. Il s'agit donc de montrer comment une chaîne de connaissances sur les données et sur les modèles de comportement peut permettre, à partir de la modélisation stochastique de variables élémentaires (de type résistance, effort, dimension

---

<sup>2</sup>L'environnement (*e.g.* les conditions d'utilisation, les sollicitations réelles) comme la fabrication (*e.g.* caractéristiques matériaux et géométriques) des systèmes mécaniques ne sont jamais parfaitement connus, a fortiori au moment de leur conception.

géométrique, paramètres matériau), de remonter aux différents nœuds du modèle de fiabilité physique et système en fournissant à chaque niveau une information sur leur nature stochastique et sur le rôle de toutes les variables amont sur l'aléa. Au-delà de l'obtention de ces résultats en chaque nœud, la problématique consiste à exploiter leurs combinaisons pour construire une chaîne d'informations sur le système global. Celle-ci doit permettre de positionner de manière quantitative le produit vis-à-vis de son niveau de fiabilité en distinguant les séquences phénoménologiques influentes de celles qui n'ont qu'une faible contribution dans le scénario de défaillance, et de dégager les leviers disponibles en conception pour l'amélioration de ce niveau de fiabilité.

### 1.3 Objectifs des travaux de recherche

Ce travail de thèse a été impulsé par la Direction de la Conception et des Technologies de l'Ingénierie Mécanique de la société RENAULT S.A.S et son Département Fiabilité et Mise Au Point Mécanique. Ils en ont assuré le financement et le co-encadrement au travers d'un contrat CIFRE les liant au Laboratoire de Mécanique et Ingénieries de l'Institut Français de Mécanique Avancée (IFMA) et de l'Université Blaise Pascal (UBP) de Clermont-Ferrand.

Les objectifs des travaux présentés dans ce mémoire se déclinent sur deux niveaux. Sur le plan académique, le but est d'initier une discussion sur la nécessité d'intégrer la prise en compte de la physique de défaillance dans des modèles de fiabilité de type système. Autrement dit, il s'agit de participer au développement d'une approche profitant de la modélisation à la fois *système et physique* du problème de fiabilité. A cet effet, on propose une méthodologie globale visant à faire pénétrer et à exploiter l'analyse de fiabilité mécano-probabiliste à chaque niveau d'un modèle système détaillant de manière qualitative les scénarios phénoménologiques de défaillance de systèmes mécaniques. Sur le plan industriel, une première retombée est l'introduction, ou plutôt le renforcement, de la culture de l'incertain dans les métiers de la conception. Si la conception s'est d'abord intéressée à la recherche des quantités optimales, c'est-à-dire des meilleures valeurs nominales, il apparaît clairement maintenant la nécessité de prendre également en compte la variabilité. En effet, un niveau *a priori* moins bon de performance peut être une meilleure solution s'il diminue la variabilité et engendre de ce fait une meilleure appréciation de la fiabilité ou de la durée de vie des dispositifs. Ensuite, il s'agit de poser les bases d'une méthodologie de conception pour la fiabilité assurant une aide au dimensionnement et élaborant des arguments fondamentaux pour la construction de plans de validation de la fiabilité à chaque instant du processus de conception de systèmes mécaniques.

### 1.4 Organisation du mémoire et circuits de lecture

Ce mémoire de Thèse se décompose en 10 chapitres explicités par la suite. Il peut être lu selon plusieurs points de vue, suivant les différents itinéraires de lecture illustrés dans les figures 1.1 à 1.8. De manière classique, il est conseillé de commencer la lecture de ce mémoire par l'introduction et de la terminer par la conclusion. Les chemins de lecture pertinents sont alors les suivants :

1. Le premier correspond à une lecture essentielle et synthétique (Fig. 1.1). Il s'agit du circuit de lecture idéal pour une première découverte de l'ensemble de la réflexion. Les visiteurs dont l'attention serait en particulier retenue par l'un ou l'autre de ces aspects pourront, à leur guise, compléter leur visite à travers la lecture des chapitres additionnels qui leur sont consacrés.

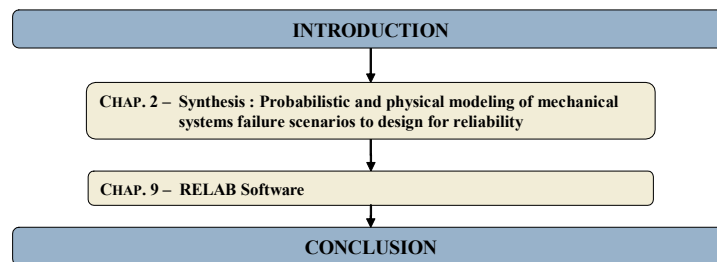


FIG. 1.1 – Circuit de lecture essentielle et synthétique.

2. Le second s'oppose au premier et consiste en une lecture exhaustive (Fig. 1.2). Cet itinéraire est réservé aux visiteurs les plus endurants dont l'objectif est de parcourir dans les moindres recoins l'ensemble de la démarche fiabiliste proposée.

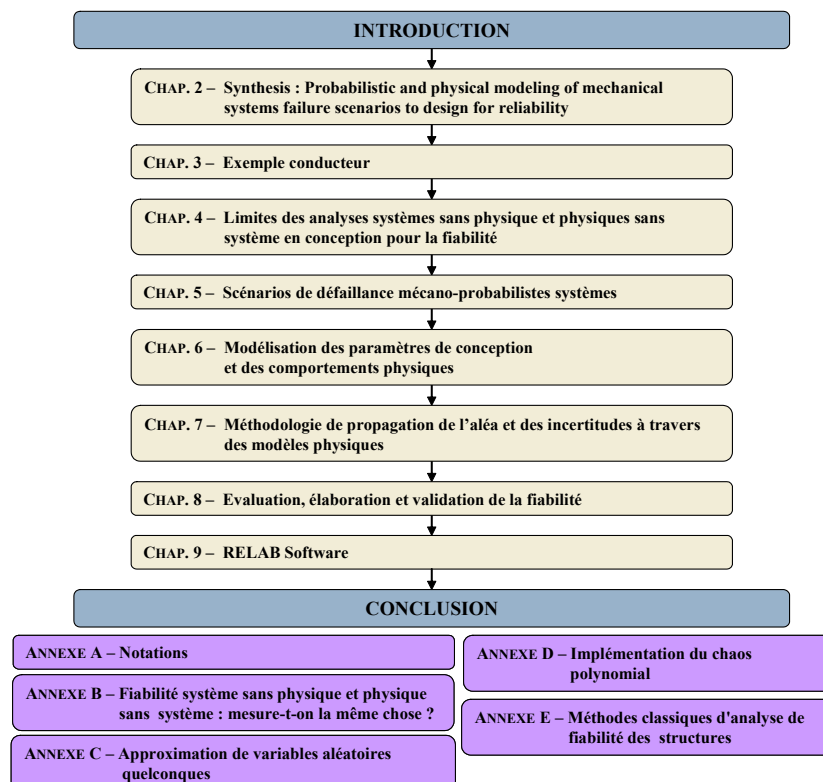


FIG. 1.2 – Circuit de lecture complet pour les lecteurs les plus endurants.

3. Le troisième est un circuit de lecture spécifique aux concepteurs de systèmes mécaniques et aux experts des méthodologies de la conception (Fig. 1.3). Il a pour objectif de mettre en relief les principes et la valeur ajoutée d'une approche système, physique et probabiliste de la conception fiable en contexte incertain, tout en précisant l'enjeu des multiples apports qu'elle est en mesure de fournir.

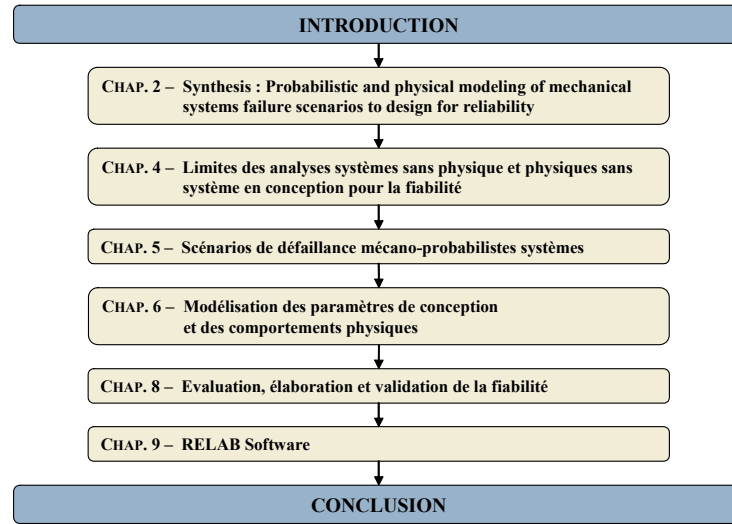


FIG. 1.3 – Circuit de lecture spécifique aux concepteurs de systèmes mécaniques.

4. Le quatrième est dédié aux ingénieurs fiabilistes (Fig. 1.4). Argumentant la nécessité de déployer des approches fiabilistes systèmes et physiques, il les incite d'abord à une remise en question. Il introduit alors les efforts que nous attendons d'eux pour assurer la construction de scénarios systèmes, intégrant la logique et la physique de défaillance, voués à un traitement mécano-fiabiliste original.

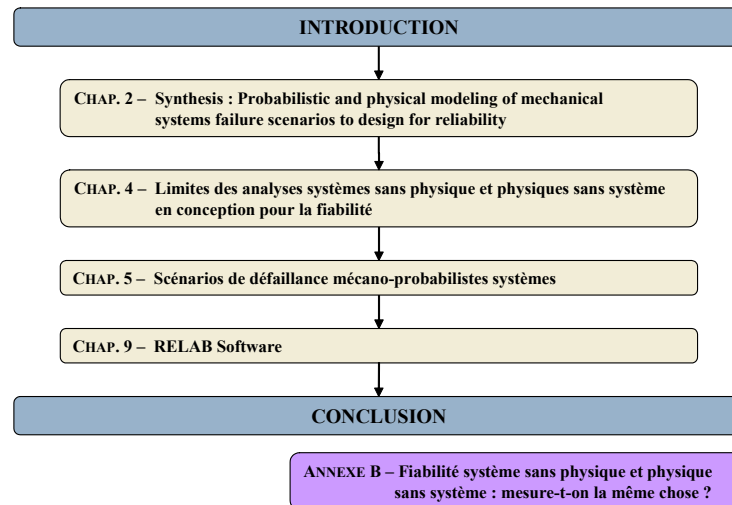


FIG. 1.4 – Circuit de lecture dédié aux ingénieurs fiabilistes.

5. Le cinquième s'intéresse de manière ciblée aux tâches relevant de l'expertise des ingénieurs statisticiens (Fig. 1.5). Il a pour principal objectif de préciser leurs multiples apports que ce soit au niveau de la modélisation des incertitudes sur les données d'entrée ou sur l'aide précieuse qu'ils peuvent fournir pour la modélisation simplifiée de phénomènes physiques peu ou mal maîtrisés.

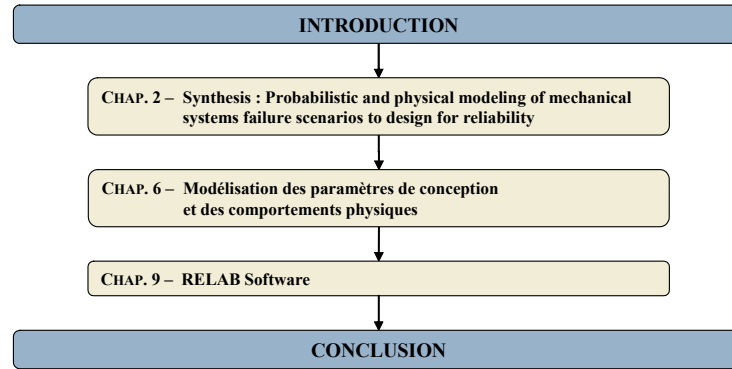


FIG. 1.5 – Circuit de lecture propre aux ingénieurs statisticiens.

6. Le sixième est spécifiquement destiné aux ingénieurs mécaniciens et aux spécialistes de la physique (Fig. 1.6). En particulier, il clarifie leur rôle et l'enjeu de leurs interactions avec les fiabilistes dans le cadre de l'élaboration de scénarios de défaillance à contenu physique. Il introduit également les bases des échanges qu'ils doivent favoriser avec les statisticiens afin de mettre en œuvre une procédure efficace de construction et d'exploitation de modèles de comportement physique simplifiés.

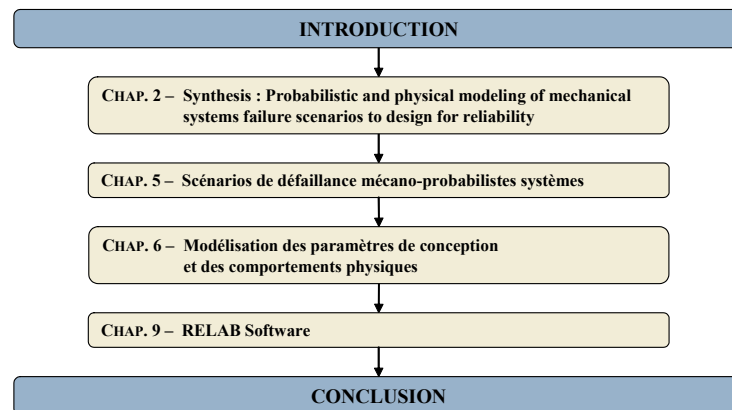


FIG. 1.6 – Circuit de lecture spécifique aux mécaniciens et spécialistes de la physique.

7. Le septième est dédié aux ingénieurs probabilistes, c'est-à-dire aux experts des méthodes de calcul stochastique propres aux différentes techniques du couplage mécano-fiabiliste (Fig. 1.7). Outre l'introduction à une méthodologie originale de propagation de l'aléa au sein de scénarios de défaillance phénoménologiques, cet itinéraire de lecture insiste sur les échanges qu'ils doivent encourager avec les autres acteurs de la conception fiable à des fins d'optimisation.

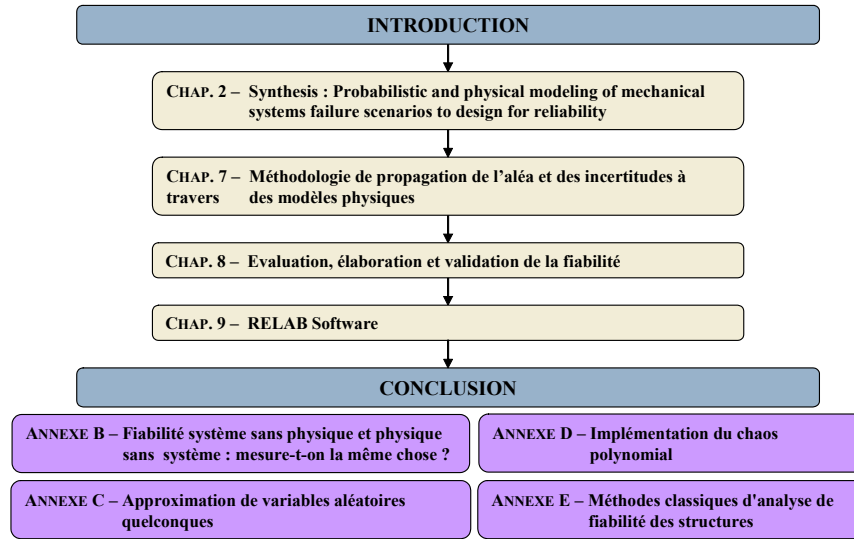


FIG. 1.7 – Circuit de lecture dédié aux ingénieurs probabilistes.

8. Le huitième et dernier est propre aux décideurs (Fig. 1.8). Il a pour principale caractéristique, dans le contexte de la validation de la conception par rapport aux exigences de fiabilité, d'insister sur la valeur ajoutée de l'ensemble des produits et des informations issus de l'analyse fiabiliste de scénarios de défaillance phénoménologiques et probabilistes que nous proposons.

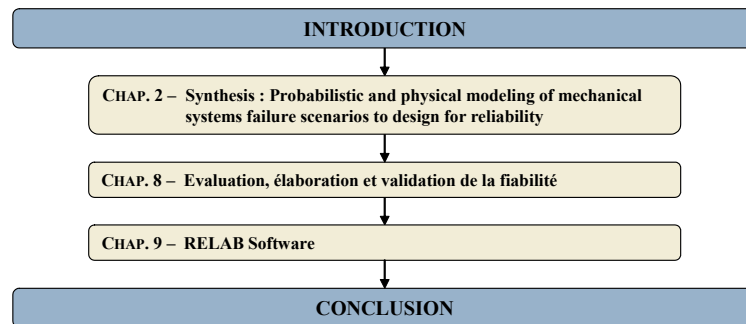


FIG. 1.8 – Circuit de lecture propre aux décideurs.

La raison d'être et l'objectif majeur de chacun des 10 chapitres sont précisés ci-après.

Le **premier chapitre** correspond tout simplement à la présente introduction.

Le **chapitre 2** donne un aperçu général du potentiel et des enjeux de l'analyse de fiabilité prévisionnelle proposée. Il s'agit plus précisément d'une synthèse de l'ensemble des travaux dont la rédaction est volontairement effectuée en anglais.

*La lecture de ce chapitre confère donc une vision globale et synthétique de la méthodologie développée dans le cadre de nos travaux de thèse. Le lecteur désireux d'en approfondir les aspects originaux et les points forts peut alors se référer aux chapitres suivants qui s'y intéressent de manière spécifique.*

Le **chapitre 3** a pour objectif d'introduire l'exemple conducteur illustrant la démonstration des points forts et originaux de l'approche mécano-probabiliste en conception pour la fiabilité que l'on propose. Il s'agit d'un sous-système mécanique d'un moteur d'automobile Diesel dont la fiabilité est analysée au regard de plusieurs critères. Ses principes de fonctionnement sont précisés et les éléments nécessaires à la modélisation des phénomènes impliqués dans ses défaillances potentielles sont introduits.

*Cet exemple est exploité au cours des chapitres suivants soit en le considérant dans sa globalité soit en se focalisant sur un de ses aspects spécifiques pris isolément.*

Le **chapitre 4** présente un résumé de l'état de l'art des méthodes et des outils classiquement déployés dans le cadre d'analyses prévisionnelles de fiabilité de systèmes mécaniques. Sur la base d'une décomposition systématique d'un processus de conception industrielle, nous hiérarchisons ces différents moyens d'analyse de fiabilité. Ils sont évalués par rapport à leur moment d'utilisation au cours de la conception. Ils sont classés au regard des interactions qu'ils génèrent avec les métiers de la conception pour la définition des paramètres de conception et l'aide au dimensionnement.

*Ce chapitre argumente et justifie la nécessité de développer une approche d'élaboration et de validation de la fiabilité en conception, reposant sur des modèles de simulation numérique des scénarios de défaillance des systèmes mécaniques : modèles intégrant à la fois la modélisation système de la physique de défaillance et la considération des incertitudes inhérentes à sa réalisation.*

Le but du **chapitre 5** est de définir les étapes de la création de la structure de modèles quantitatifs de scénarios phénoménologiques de défaillance, structure qui constitue la base de la méthodologie proposée. La grammaire spécifique définissant le processus de construction de la structure du modèle physico-probabiliste est précisée. Elle repose sur des règles heuristiques et sur des critères de granularité.

*A l'issue de ce chapitre, nous sommes en mesure de construire la structure évolutive de scénarios phénoménologiques de défaillance quantitatifs à partir de la description qualitative arborescente des scénarios de défaillance d'un système mécanique.*

Le **chapitre 6** s'attache à montrer comment intégrer aux représentations structurales de scénarios phénoménologiques, les modèles numériques évolutifs :

- des incertitudes de caractérisation des paramètres élémentaires de conception ;
- du comportement et de la physique de défaillance des systèmes considérés.

Une représentation probabiliste des paramètres de conception est adoptée. Sa capacité de mise à jour par actualisation Bayésienne de la connaissance disponible est exploitée.

La modélisation des phénomènes physiques et des performances identifiés aux différents nœuds des scénarios profite des techniques de métamodélisation. Sa précision est adaptée en fonction de la connaissance et du niveau d'exigence des réponses attendues. *A la suite de ce chapitre, nous disposons d'un modèle de simulation numérique, à la fois logique, physique et probabiliste, des scénarios de défaillance d'un système mécanique. La définition de critères de performance et de fonctions d'états limites permet d'identifier les configurations dégradées ou défaillantes du système considéré.*

Le **chapitre 7** est dédié à l'identification d'une méthodologie d'agrégation des incertitudes de caractérisation des données d'entrée et de l'aléa sur le comportement physique à travers les différents nœuds et niveaux de scénarios de défaillance physico-probabilistes. Deux procédures de passage d'un nœud du modèle sont définies :

1. au moyen d'une méthode couplant un schéma de quadrature de Gauss (pour le calcul des moments de la variable aléatoire) et d'une technique de reconstruction de sa fonction de densité de probabilité dite de l'exponentielle d'un polynôme.
2. au moyen du développement d'une variable aléatoire quelconque sur une base définie par un chaos polynomial.

*A ce stade, nous disposons de tous les éléments pour la définition d'un modèle évolutif de fiabilité système basé sur l'analyse physico-probabiliste des scénarios de défaillance.*

Le **chapitre 8** est consacré à la mise en œuvre des outils classiques du calcul mécano-fiabiliste pour traiter les scénarios de défaillance physico-probabilistes du point de vue de la conception optimale. Nous définissons plusieurs stratégies d'analyse dont nous précisons les tenants et les aboutissants. Nous introduisons aussi le concept d'analyses *FORM* de type "court-circuit" à partir desquelles nous proposons la construction de chaînes de facteurs d'importance originales. Nous illustrons enfin la capacité de ces produits à piloter l'activité de conception en assurant la définition d'arguments d'aide au dimensionnement fiable et la construction de plans de validations adéquats.

*Un tel modèle de fiabilité physico-probabiliste système complet catalyse les synergies des acteurs de la conception. Il exige d'eux un nouvel effort de conceptualisation et une connaissance toujours plus approfondie de leurs données et de leur savoir-faire. Il assure l'élaboration et la validation de la fiabilité à chaque étape du processus de conception de systèmes mécaniques.*

Le **chapitre 9** présente le programme *RELAB* d'élaboration de la fiabilité par la simulation numérique d'un système mécanique en cours de conception. L'implémentation de cet outil logiciel a été motivée par deux objectifs essentiels :

- automatiser la réalisation et le traitement des modèles systèmes et physiques de fiabilité qui deviennent vite fastidieux à mettre en œuvre.
- assurer la "vulgarisation" de l'analyse de fiabilité proposée afin de convaincre de son potentiel les acteurs de la conception industrielle ainsi que les décideurs.

*Le logiciel RELAB assure une mise en œuvre simple, intuitive et automatisée de la méthodologie proposée.*

Enfin, le **dernier chapitre** est dédié aux conclusions et aux perspectives des travaux effectués.



## Chapitre 2

# Synthesis : Probabilistic and physical modeling of mechanical systems failure scenarios to design for reliability

### Introduction

In the past few years, the mechanical engineering industry has been dealing with an increasing trend towards the requirement to produce highly reliable devices while facing new challenges, such as reducing development times and coping with the on growing complexity of the products and their environment. As a result, there is a crucial need to set efficient reliability specifications in new product development [ØMR04] and to design for reliability. To fulfill that goal, efforts should be made to reinforce the use of risk and reliability-based approaches in the context of industrial concurrent engineering design processes. In other words, reliability should be designed and built into mechanical systems at the earliest possible stages of their development.

First, using a systematic design process decomposition, we compare classical reliability approaches with respect to their applicability and the capacity of their results to interact with the designers. Thus, we make a distinction between the qualitative approaches to failure and reliability analysis, their *system without physics* quantitative interpretations (*e.g.* classical system reliability analysis) and their *physical without system* quantitative formalizations (*e.g.* classical structural reliability analysis). The terminology is clarified thereafter. In fact, this comparison will emphasize the need :

1. to bring together or at least close the gap between the so-called *system without physics* and *physical without system* reliability models.
2. to broaden the use of reliability analysis based on physical modeling to the preliminary design stage of mechanical systems.

As a result, taking advantage of the recent and considerable developments of simulation tools and computing resources, we propose to develop an evolutive and probabilistic approach to design for reliability, which relies on the sequential physical modeling

of the failure scenarios. Benefiting from a combined *system and physical* point of view, it aims at making the most of its results for design enhancement purposes at each stage of an iterative design process. It also intends to exploit more efficiently the synergies of all the actors of the design process, namely : designers, physicians and specialists of the physics-of-failure modeling, reliability engineers, statisticians, specialists of the implementation of probabilistic methods and decision-makers [Lem04]. We then detail the main construction aspects of the proposed probabilistic reliability framework. The structural identification of the associated quantitative reliability model using failure mechanism trees is described. Its updating capabilities with respect to the different stages and cycles of the design process are highlighted. Finally, we put emphasis on the results we obtained by implementing several analysis strategies. In particular, we introduce the concepts of shortcut FORM/SORM analysis and chains of importance measures. Additionally, we show how they participate in the elaboration of efficient design enhancement plans.

The main aspects of the proposed methodology are illustrated using the example of an automotive engine multi-perimeter system subjected to several failure modes (Chapter 3). As illustrated on the synoptic scheme in figure 2.1, the issues of the gas sealing quality of a cylinder head gasket and the seizing of a piston pin due to its deformation are isolated and examined. There are analyzed with respect to the sequence of phenomena that influence successively the combustion chamber filling, the combustion itself, the behavior of the crankshaft - connecting rods - piston assembly and the behavior of the cylinder head - gasket - cylinder housing assembly. The gas sealing quality is validated taking into account a minimum pressure criterion on the gasket body and a maximum boundary layer separation criterion near the cylinder. The seizing of the piston pin is studied with respect to the pin bending, its Out-of-Round (*OoR*) wear and the critical load supported by its bosses. Engineering control limit states or performance function are also defined to monitor specific parameters. For example, the definition of a control performance function to capture additional information on the maximum combustion pressure resulting from the combustion phenomena is of precious help during the design process of such a system.

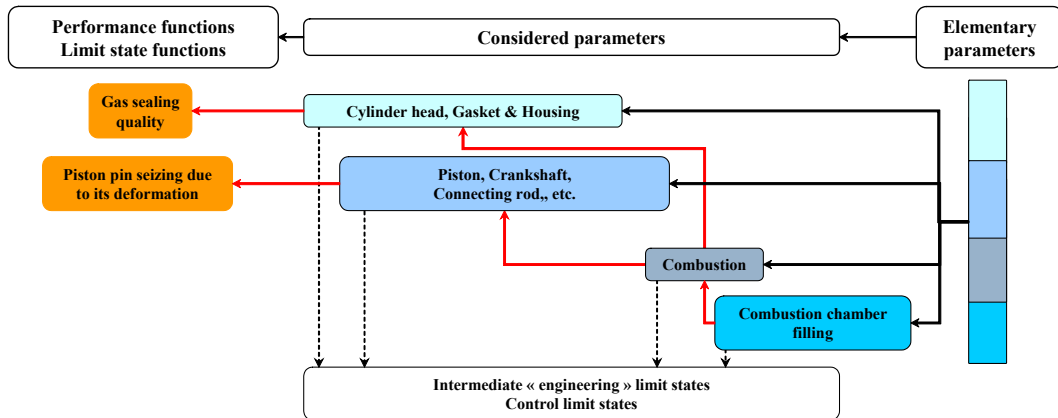


FIG. 2.1 – Synoptic scheme of the central automotive engine example.

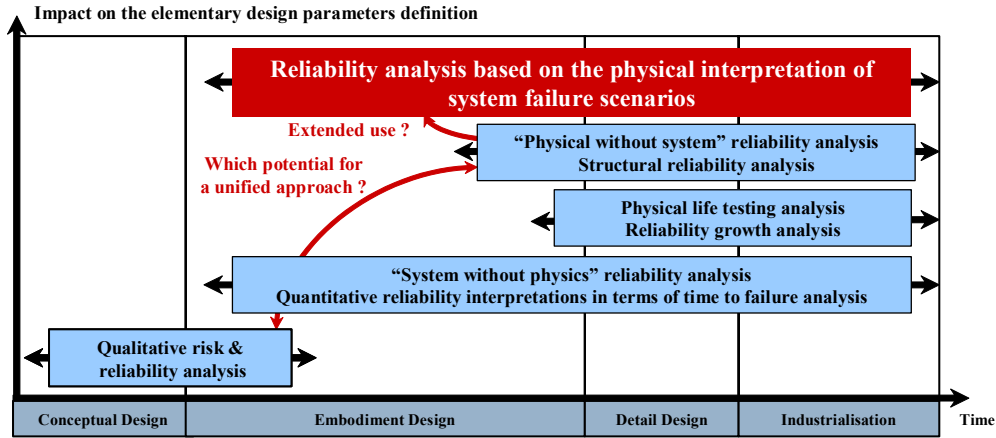


FIG. 2.2 – Reliability analyses during the design stage of mechanical systems.

## 2.1 Interactions between the design process and reliability analyses

Design for reliability takes into account all the guidelines and analyses that are carried out complementarily during the design process to ensure that a product meets its required performance and reliability targets. Usually, it is ensured by implementing successively several reliability techniques selected out of a set of classical methods. In fact, their applicability and their efficiency in the scope of design enhancement strongly depends on the design stage (Chapter 4). Many authors developed frameworks to help describe industrial engineering design. Here, in order to position relatively the existing alternative reliability approaches, we use the well-known systematic design process decomposition provided by Pahl and Beitz in [PB96] and further discussed in [Ull97].

Actually, the design process is divided in three consecutive and distinct stages : conceptual design, embodiment design and detail design. Figure 2.2 synthesizes the effectiveness of classical reliability interpretations with respect to their impact on the definition of the elementary design parameters and their moment of use in such a decomposition. Additionally, the product development phase is represented to show which methods are useful to control its reliability and possibly refine its design after the main stages of the design process.

### 2.1.1 Conceptual design

It corresponds to the process of conceiving ideas and working principles from a functional point of view. A number of concepts are usually generated and evaluated against each other in order to select the best one. Functional Analysis (FA), Function Analysis System Technique (FAST) and Value Analysis (VA) [Fow90, Aki91, Yan98], Quality Function Deployment (QFD) [Aka04], TRIZ [Sav02], brainstorming and competitive benchmarking analysis are some of the important analysis tools at this stage.

Classically, qualitative risk and reliability analysis are implemented iteratively du-

ring this design stage. It is a prerequisite to any quantitative interpretation. Techniques such as Preliminary Hazard Analysis (PHA), Failure Mode Effects and Criticality Analysis (FMECA), qualitative Fault Tree Analysis (FTA) and Event Tree Analysis (ETA) [Vil88] participate in guaranteeing that all the potential failure modes of the systems are identified. Subsequently, the miscellaneous associated failure scenarios are exhaustively described in order to be further discussed and analyzed. Usually, they are updated during the early steps of the embodiment design phase.

### **2.1.2 Embodiment design**

It consists in a structured development of the chosen concept. This phase participates in developing the preliminary design layout for the selected technical solution. The system structural topology takes form while initial load, stress, thermal and performance analysis are usually performed on its multiple components using simplified models and design rules. Mock-ups and early prototypes are built or manufactured to achieve real feasibility of the new product. The design is assessed against objective criteria (cost, reliability, manufacturing, ...) and refined iteratively if necessary.

At this stage, reliability interpretation and evaluation based on time to failure approaches [RH04] are usually derived. Actually, all the information about the design, the operating constraints, the loads and the strength of the system of interest are combined and described implicitly by means of the reliability function  $R(t) = \Pr(T \geq t)$ , where  $T$  denotes the time to failure. They allow the analyst to take into account the system dimension of the item failures based either on a static structural formalism or on a state-space dynamic formulation of the reliability problem. For those reasons, we denote them as *system without physics* reliability analyses. They encompass well-known reliability estimation tools and techniques such as Reliability Block Diagram (RBD) [DoD80], quantitative Fault Tree [VGND81], Bayesian Belief Networks (BBN) [Jen01, WJ06], state-space Markovian analysis [CT97], Petri nets [MBC<sup>+</sup>95] and dynamic reliability approaches [LSS00a]. Note that formal methods and languages (*e.g.* AltaRica [BDRS06]) can be used to get unified reliability evaluation frameworks and higher level representations of the functional and dysfunctional aspects of the system. The common inputs of these *system without physics* reliability analyses (*e.g.* failure rates, state transition rates and statistical failure models) stem from reliability database, field data or experts judgment. Actually, they participate in validating the architecture of the system allowing the estimation of reliability measures (Annexe B) such as probability of failure, failure rate, mean time to failure and component importance. The information they provide is usually broadened during the detail design steps as more representative inputs data are extracted from design verification testing and reliability validation testing campaigns. However, their rather high level of abstraction is usually not sufficient to model accurately the reliability of complex mechanical systems. They do not establish direct links between reliability measures and the most influent design variables (*e.g.* material properties, geometry parameters, loads and process parameters). The main reason is that they do not look closely enough to the physical sources of failure and its physical propagation. In other word, the descriptions of the failure scenarios are too macroscopic in the sense that there is no explicit modeling of the loads, the strength and the physical behavior of the systems.

### **2.1.3 Detail design**

Also known as parametric design, this phase participates in validating and refining the preliminary design. On the one hand, comprehensive test campaigns are performed and possibly optimized using Design Of Experiments (DOE) techniques [MGH03]. On the other hand, numerical simulations of the system performance based on highly representative load and behavior models (*e.g.* Finite Element Models) are extensively used. Again, the design is assessed against objective criteria and refined if necessary.

At this stage, *system without physics* reliability analyses introduced beforehand are still of use. They are completed by life data or physical life testing analysis [Nel82, BN02] and Reliability Growth Analysis (RGA) [IEC95] that aim at observing the times to failure of a sample of physical systems functioning under various values of explanatory variables such as temperature, voltage, load, pressure, etc. Monitoring the increase of reliability throughout the mechanical system development, they participate in verifying and validating the design as well as defining necessary corrective actions. However, as they require the testing of a significant number of template systems, they are performed almost exclusively during the last iteration of the detail design phase and during the product development stage.

Alternatively, physical reliability approaches based on mathematical modeling and numerical simulations of the system physics-of-failure are implemented. They encompass reliability evaluation tools and techniques such as well-known time-invariant FORM/SORM methods [Lem05b, DM96] and the time-variant asymptotic analysis [Rac98] or the Phi2 approach [ARSL04]. Mainly developed in the field of structural reliability, these methods are convenient to design structural and mechanical components in an uncertain context modeled by random variables or random processes. In other words, they explicitly take into account the values of the design parameters and the conditions of use of the system to evaluate the reliability  $R(t)$ . They now reached a good level of maturity. Their major results (Annexe E) consist of the estimation of probabilities of failure and reliability indexes with respect to given performance or limit state functions. They also give essential insight into the sensitivities of the system response and the sensitivities of its reliability measures with respect to design parameters or model parameters. This information is important to promote efficient dialogs between designers and reliability specialists. Nevertheless, we denote these approaches as *physical without system* because their use is yet too restricted to the analysis of isolated components. The reason comes from a lack of efficient system representations which is due to the inherent complexity and specificity of mechanical systems. In fact, even if formulations of structural system reliability have been derived (mainly based on static system architecture or path/cut formulations [BA86, DB86]), there is still a need to better address the identification problem of the sequences of phenomenological mechanisms involved in their failures.

### **2.1.4 System & physical modeling of failures to design for reliability**

On the one hand, *physical without system* approaches obviously enable close interactions between reliability analysis and the definition process of the elementary design parameters. However, their use is still limited to the last steps of the detail design

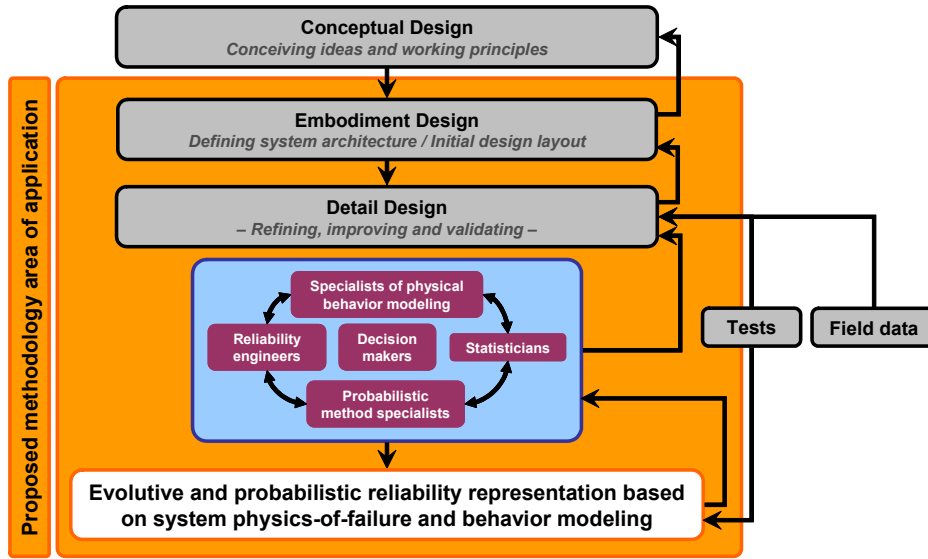


FIG. 2.3 – Interactions between the proposed methodology and the design process.

phase. Hence, there is a need to extend their applicability to the embodiment design phase. On the other hand, *systems without physics* and *physical without system* reliability analyses are complementary. As a first step towards the development of a unified system approach that would benefit more from the advantages of both analysis types, we recommend to go more in depth in the physical description of the system failure scenarios, looking closer to the physical sources of failure as well as its propagation.

As a result, we develop an evolutive and probabilistic system reliability model based on the sequential physical metamodeling of the failure scenarios. It aims to be more integrated into the successive stages of an industrial products design process as illustrated in figure 2.3. Benefiting from tools developed in the field of structural reliability, we show that it allows us :

- to evaluate systems reliability while taking into account the failure logic as well as the physics-of-failure sequences and its system dimension ;
- to characterize the physical phenomena and the design parameters that impact the most the reliability of the system ;
- to identify the suitable design levers to improve the reliability of the system ;
- to ensure at each design iteration, based on the available information or knowledge, that the design choices allow the convergence of the system towards a required reliability level ;
- to benefit from the synergies and the expertise of the main contributors of an industrial product design process.

## 2.2 Physical and probabilistic system reliability model

Figure 2.4 gives an overview of the model. Its main aspects deal with :

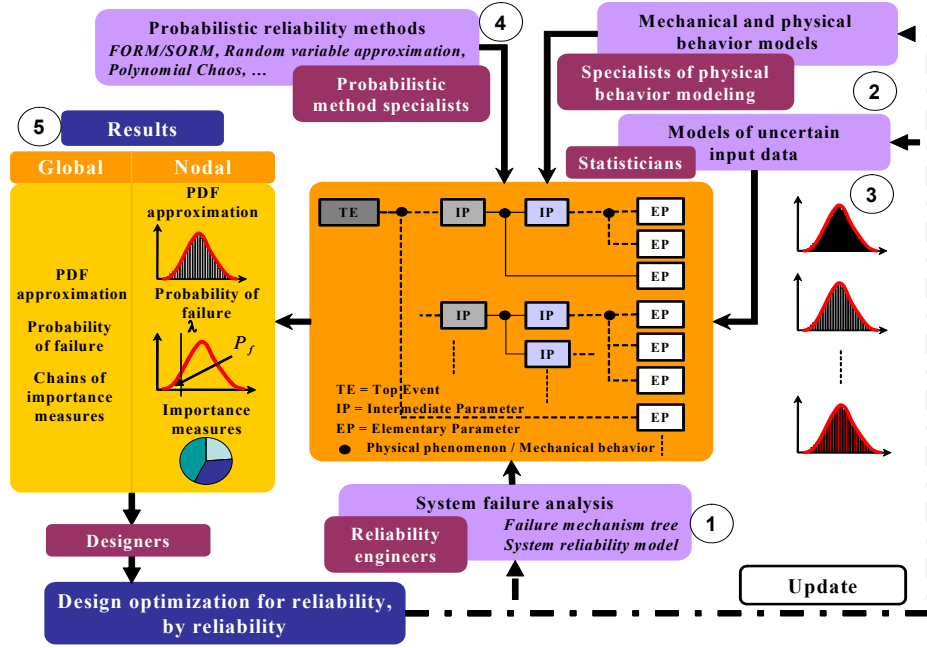


FIG. 2.4 – Overview of the proposed reliability analysis framework.

1. the elaboration of the structure of the quantitative system reliability model which is based on exhaustive qualitative descriptions of the phenomenon sequences that lead to failure or loss of performance of the system ;
2. the mathematical modeling of the physical phenomena and the corresponding limit state functions by use of metamodels, models of expertise or complex analysis code models ;
3. the flexible probabilistic modeling of the design parameters based on Bayesian updating of the available knowledge ;
4. the implementation of a methodology to aggregate, through the whole model, the uncertainties inherent to the characterization of the elementary parameters ;
5. the original reliability analysis processing and post-processing for design optimization.

### 2.2.1 Qualitative and quantitative failure mechanism scenarios

Here, we consider that the innovative and/or critical aspects of the system as well as all its potential failure modes are already pointed out by means of PHA and FMECA analyses. On this basis, we propose to take advantage of failure mechanism tree [HRL05] to fully describe the failure modes (also denoted as *Top Events* - *TE*) of the system and their related physical failure scenarios (Chapter 5). Actually, they consist in a detailed and exhaustive top-down qualitative analysis of failure mechanisms. It leads to the sequential identification of all the physical phenomena and the elementary design parameters that are likely to have an impact on the *TE* and an

influence on the reliability of the system. Basically, the elementary causes correspond to design parameters such as geometrical specifications of parts, process parameters, loads or parameters of functioning.

Once qualitative failure mechanism tree analysis is performed, it is used to obtain a formal representation favoring an original quantitative reliability interpretation. The structure of the quantitative model does not necessarily have to fit exactly the exhaustive qualitative decomposition. Empirical guidelines that mainly consist of common sense rules and criteria are formulated to help the analyst define the best structure. It is essential to keep identical the primary and the terminal levels but the detail fineness of the reliability model can be adjusted at the different stages of the design process depending on :

- what we want to demonstrate in terms of reliability ;
- what we really know about the behavior of the system and its modeling ;
- which parameters and phenomena we want to monitor.

Figure 2.5 illustrates an extract of the global model structure corresponding to the two *TE* related to the gas sealing quality of the cylinder head - gasket - cylinder housing assembly (the other *TE* and failure scenarios introduced in figure 2.1 are not detailed here). It reveals the dependencies between parameters that have a potential influence on the gas sealing quality criteria and which we want to monitor and control for reliability analysis purposes. It could have been divided in more levels but that would not have given more useful information from the reliability point of view.

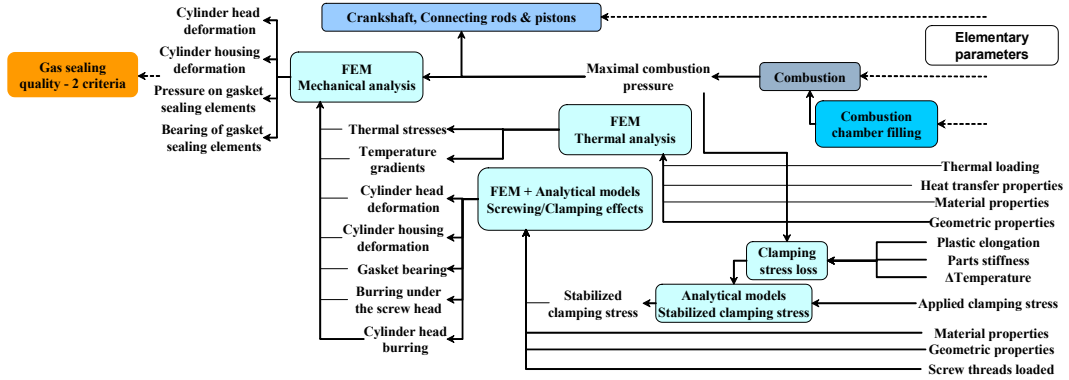


FIG. 2.5 – Idealized structure of the failure scenarios related to the gas sealing criteria.

Assuming that the topology of the quantitative model is characterized using this procedure, we now define formally its levels and its nodes. The elementary level, noted 0, contains the design parameters identified through the qualitative failure mechanism tree analysis. Let  $\mathbf{X}^{(0)}$  denotes the vector of these  $nva_0$  variables. Level 1 is constituted by the  $nva_0$  variables of level 0 to which are added  $Nc_1$  variables  $S_{k'}^{(1)}$  resulting from the physical transition from level 0 to level 1. Each variable  $S_{k'}^{(1)}$ ,  $k' = 1, \dots, Nc_1$ , follows from a transformation  $M_k^{(1)}$ ,  $k = k' + nva_0$  that models the physics of the considered phenomenon :

$$\mathbf{X}^{(0)} \longrightarrow \check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(0)} \longrightarrow S_{k'}^{(1)} = M_k^{(1)} \left( \check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(0)} \right) \quad (2.1)$$



where  $\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(0)}$  is the vector of the input variables of the transformation  $M_k^{(1)}$  built on  $\mathbf{X}^{(0)}$ . The vector  $\mathbf{X}^{(1)}$  of level 1 is then defined by :

$$\mathbf{X}^{(0)} \Big|_{nva_0} \xrightarrow{M_k^{(1)}, k=1, \dots, nva_1} \mathbf{X}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(0)} \Big|_{nva_0} \\ \mathbf{S}^{(1)} \Big|_{Nc_1} \end{array} \right\}_{nva_1} \quad (2.2)$$

Note that  $X_k^{(1)} = M_k^{(1)}(\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(0)}) = X_k^{(0)}$  for  $k = 1, \dots, nva_0$ . This procedure incrementally leads to the definition of  $\mathbf{X}^{(l)}, l = 0, \dots, TE$  the vector of the  $nva_l = nva_0 + \sum_{i=1}^l Nc_i$  variables of level  $l$ . The transition from a given level  $l$  to the next level  $l + 1$  is then given by :

$$\mathbf{X}^{(l-1)} \Big|_{nva_{l-1}} \xrightarrow{M_k^{(l)}, k=1, \dots, Nc_l} \mathbf{X}^{(l)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(l-1)} \Big|_{nva_{l-1}} \\ \mathbf{S}^{(l)} \Big|_{Nc_l} \end{array} \right\}_{nva_l} \quad (2.3)$$

Performance functions and limit state functions can be defined for any elementary, intermediate or terminal parameter :

$$G_k^{(l)} = M_k^{(l)}(\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}) - \gamma_k^{(l)} = X_k^{(l)} - \gamma_k^{(l)}; k = 1, \dots, nva_l; l = 0, \dots, TE \quad (2.4)$$

where  $\gamma_k^{(l)}$  is a threshold that can be equal to zero. These  $G_k^{(l)}$  functions consist in mathematical and numerical models of the system changes in state. There are derived either based on design rules or control criteria.  $G_k^{(l)} \leq 0$  defines the failure domain  $\mathcal{D}_{f_k}^{(l)}$  while  $G_k^{(l)} > 0$  defines the safe domain  $\mathcal{D}_{s_k}^{(l)}$ . The performance and reliability of the system are measured with respect to these performance and limit state functions and their capacity to work in the so-called safe domain. For example, in figure 2.5, a control performance function can be defined with respect to the maximum combustion pressure and a limit state function can also be associated with each gas sealing criterion.

This procedure totally defines the formal structure of the proposed quantitative reliability model based on the physical interpretations of the system failure mechanisms. Each node of the proposed model consists in a logical as well as physical entity clarifying a specific physical phenomenon or a particular aspect of the behavior of the system involved in its failure. It generalizes classical component structural reliability models which usually look at failure modes in an isolated way, which focus on the  $TE$  level without considering in detail the associated failure scenarios and the chains of phenomena that govern the failure propagation.

### 2.2.2 Physical and mechanical evolutive modeling

The transformations  $M_k^{(l)}$  introduced beforehand consist in more or less complex and accurate mathematical representations of physical phenomena or physical behaviors of the system (*e.g.* elasticity, thermoplasticity, crack, wear, corrosion). We distinguish three main types of models (Chapter 6) :

1. The models of knowledge are derived from equations provided by available theories. They are given explicitly and analytically.

2. The numerical solutions to the knowledge models are defined implicitly through finite element codes or any other simulation analysis codes. Metamodeling techniques [Bar94] are sensibly used to obtain a simplified and computationally less expensive *model of the model*. The most common approach to metamodeling is to apply a numerical DOE to identify an efficient set of input combinations and then use regression analysis on the corresponding simulated response to create a polynomial approximation of the computer analysis code. There exist several techniques to obtain efficient metamodels. A comprehensive survey is given in [SPKA01]. Recent applications of metamodeling techniques in the context of structural reliability analysis can be found, for example, in [GBL03] (polynomial response surface methodology), [SVG05] (Kriging), [GA04] (neural networks) and most recently in [DL06] (Support Vector Machines).
3. The models of expertise approximate unknown or badly mastered phenomena and behaviors. They aim at providing a better understanding giving insight into the functional relationship between design variables or inputs and a response variable. The models of expertise are derived from all the available information (*e.g.* test data, field data, expert judgment) and the results of experimental design strategies. Therefore, the models are obtained using statistical approaches and metamodeling techniques are again of precious help.

Taking advantage of metamodels and models of expertise, we are able to work with the relevant physical models at each step of the design process :

- the most appropriate with respect to our knowledge of the physical phenomena and the behavior of the system of interest.
- the most pertinent with respect to what is expected from the reliability analysis that will be later performed.

Furthermore, the use of knowledge models and metamodels for reliability analysis purposes extend the applicability of the suggested reliability approach to the embodiment stage of the design process. No matter how rough the resulting reliability estimation might be since it is refined during the subsequent steps of the design process. Additionally, considering that the final step of the detail design phase is not reached, there is no reason why the complexity and the accuracy of each nodal physical transformations  $M_k^{(l)}$  of the quantitative failure mechanism tree should be homogeneous. Several nodes can be modeled using complex analysis code while the others only consist of rough knowledge models or refined expertise-based metamodels. Actually, the representativeness of the knowledge and the information used to build the models  $S_k^{(l)} = M_k^{(l)} \left( \tilde{\mathbf{X}}^{(l-1)}, \boldsymbol{\theta}_{M_k^{(l)}} \right)$  as well as the model parameters  $\boldsymbol{\theta}_{M_k^{(l)}}$  are integrated in the proposed reliability analysis. As a result, their influence on the system reliability and its estimation is monitored. Eventually, it allows us to point out the weakest nodes and to define specific, not more than necessary, efficient model enhancing actions during the next design iteration. Figure 2.6 illustrates the evolution and the refinement of the models as we progress through the different stages and cycles of the design process, as the knowledge and the information on the physical phenomena is growing up.

Considering the example introduced in figure 2.1, the evolutive modeling of the combustion phenomenon is illustrated in table 2.1.

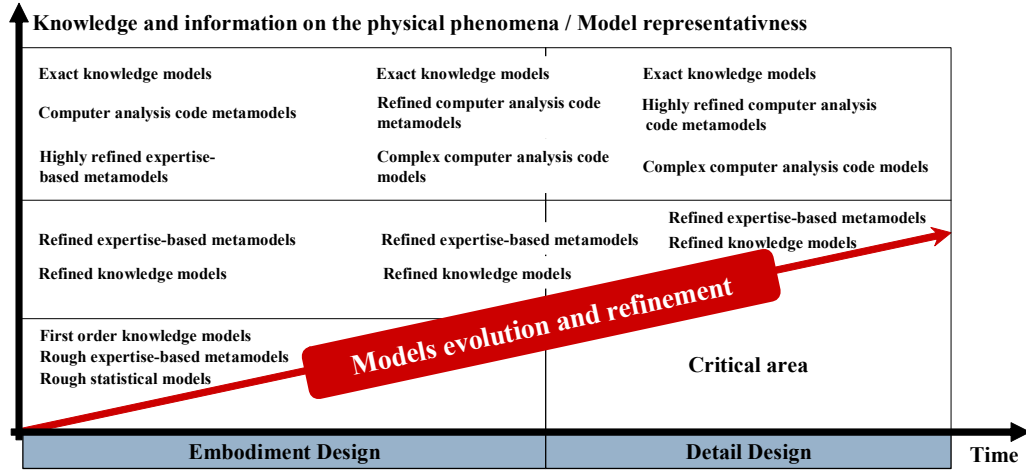


FIG. 2.6 – Physical models evolution with respect to the available knowledge.

Embodiment design		Detail design	
Early stages	Late stages	Early stages	Late stages
Analytical expertise model	Partial Quadratic Response Surface	Complete QRS improved DOE	Finite element analysis 3D modeling

TAB. 2.1 – Combustion phenomenon evolutive modeling.

Here, we introduced the tools that allow us to incorporate evolutive physical behavior models at each node of a failure mechanism tree. They are refined as we progress through the different stages and cycles of the design process, from the embodiment phase to the detail phase. The complex problem that consists in taking into account the model error (that is the distance of the idealized model response to the exact physical behavior) is not really tackled in the proposed framework. In fact, it is yet an open research problem and primary probabilistic alternatives are proposed and discussed in [Soi05].

### 2.2.3 Stochastic modeling of the design variables

During the design process of mechanical systems, the characterization of the design parameters is uncertain. It is more accurate at the end of the detail design phase but still may remain uncertain. Actually, two types of uncertainty prevail : intrinsic or aleatory variability, and epistemic or knowledge-based uncertainty. The former arise from the variabilities inherent in the nature of the phenomena. They are irreducible in the sense that even if all the information on the parameter is available, the quantity cannot be deterministically determined. The latter arise from the inexact nature of the mathematical models. Therefore, epistemic uncertainties can be influenced by our knowledge. It can be reduced using more refined models or collecting larger and more accurate data. Alternative approaches to the representation of uncertainties are based on probability theory, evidence theory, possibility theory or interval arithmetic. Com-

prehensive explorations and surveys as well as a number of comparative discussions of their advantages and drawbacks are given in [HJO04] and [MV05]. In the proposed framework, we opt for a homogeneous probabilistic representation of the design parameters uncertainties based on a classical Bayesian updating approach [BT92] (Chapter 6). Note that it already showed interest in the context of structural reliability analysis [DK89, DK01].

Figure 2.7 illustrates the potential evolution of the stochastic model of the elementary design parameters depending on the accessible sources of information.

The first information regarding the values of the design parameters  $\mathbf{X}^{(0)}$  comes from the initial definition provided by the designers in terms of specified values and tolerance interval. In fact, tolerance intervals can be preliminary modeled stochastically fitting either a uniform distribution according to the maximum entropy principle or a suitable beta probability distribution. As we progress through the different stages and iterations of the design process, the information on  $\mathbf{X}^{(0)}$  is systematically refined based on all the available data and sources of knowledge. The Bayesian approach allows us to use all the useful and meaningful information to characterize at least the probability density function (PDF) of each primary parameter. Let  $f_{X_k^{(0)}}(x_k^{(0)} | \theta_f)$  denote the PDF of  $X_k^{(0)}$  where  $\theta_f$  is the set of distribution parameters (*e.g.* the mean and standard deviation).  $f_{X_k^{(0)}}(x_k^{(0)} | \theta_f)$  is usually chosen *a priori* among a set of usual PDFs (*e.g.* uniform, normal, lognormal). First, the Bayesian updating rule is classically used to estimate the probability distribution  $f_{\Theta_f}(\theta_f | x_{k_1}^{(0)}, x_{k_2}^{(0)}, \dots, x_{k_n}^{(0)})$  of  $\Theta_f$  given a set of observations  $\{x_{k_1}^{(0)}, x_{k_2}^{(0)}, \dots, x_{k_n}^{(0)}\}$  of the random variable  $X_k^{(0)}$ . Then, using these results and the total probability theorem, the predictive distribution of  $X_k^{(0)}$  is obtained from :

$$f_{X_k^{(0)} | x_{k_1}^{(0)}, x_{k_2}^{(0)}, \dots, x_{k_n}^{(0)}} = \int f_{X_k^{(0)}}(x_k^{(0)} | \theta_f) f_{\Theta_f}(\theta_f | x_{k_1}^{(0)}, x_{k_2}^{(0)}, \dots, x_{k_n}^{(0)}) d\theta_f \quad (2.5)$$

The observations  $\{x_{k_1}^{(0)}, x_{k_2}^{(0)}, \dots, x_{k_n}^{(0)}\}$  result either from expert judgments, test data, field data or production control measures. They depend on the stage of the design

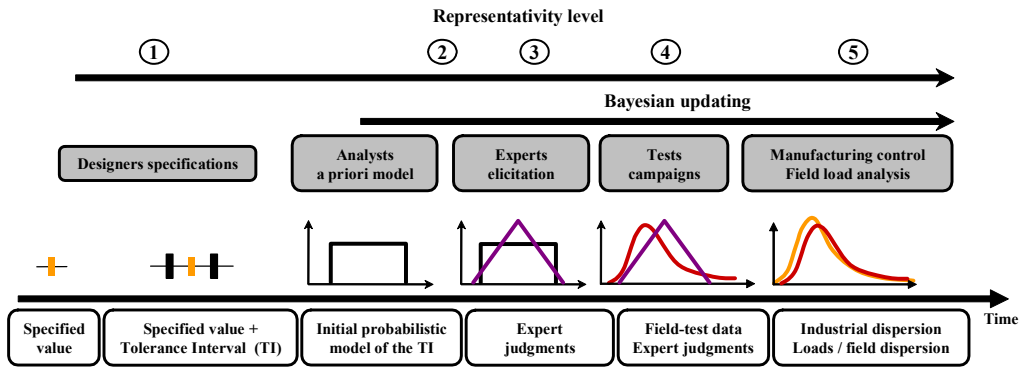


FIG. 2.7 – Evolutive modeling of the design parameter uncertainties.

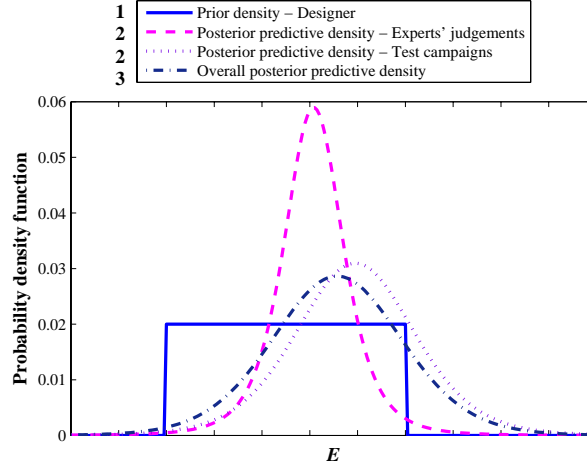


FIG. 2.8 – Piston pin Young modulus iterative stochastic models and representativeness.

process and the corresponding knowledge level. As regards the elicitation of expert opinions, systematic approaches exist to get the most of them while calibrating, weighing and aggregating their expertise. Comprehensive reviews are given in [Ayy01] and [LP01]. Also note that the computation of equation 2.5 requires the evaluation of a multifold integral. Numerical algorithms for computing such integrals have been developed in [DM96] and [GDKM93] when it cannot be derived analytically.

Subsequently, we associate a representativeness criterion to the Bayesian probabilistic characterization of the elementary parameter uncertainties. It is tentatively measured on a 1 to 5 empirical scale to capture the maturity of the probabilistic model of the design parameters. Integrated to the reliability and sensitivity analysis proposed thereafter, its weight on the system reliability and its estimation is monitored. It allows us to point out the most influent design parameters and probabilistic models. Eventually, it helps the definition of specific, not more than necessary, efficient probabilistic model enhancing actions during the next design iteration. Figure 2.8 illustrates the iterative stochastic models and representativeness (*i.e.* the numbers preceding the elements of the legend) of the piston pin Young modulus (GPa) that is examined in the example introduced in figure 2.1.

#### 2.2.4 Uncertainty aggregation within the failure mechanism tree

The objective is now to monitor the propagation of the elementary design parameters  $\mathbf{X}^{(0)}$  uncertainties through the whole phenomenological failure scenarios (Chapter 7). The issue consists in evaluating the statistical properties and the PDF of each nodal parameter  $X_k^{(l)}$  defined in equation 2.3. There is no generic solution to determine the PDF of a random variable defined through a transformation of several random variables : approximation methods are needed.

### Alternative approximation methods

A number of approximation alternatives is available in the scope of structural reliability analysis (Annexe C).

Monte Carlo direct simulation gives a histogram representation of the PDF that might be additionally smoothed using kernel smoothing techniques [WJ95]. However, their use is usually limited because they are computationally too expensive.

FORM/SORM techniques allow a point-by-point construction but does not provide an analytical expression of the PDF.

Gram-Charlier and Edgeworth techniques [SO83] approximate the PDF of a random variable using series of functions and the moments of the random variable of interest. Nevertheless, moment methods relying on Pearson and Johnson families of PDFs [SO83, PT65, Joh49] are proved to be more accurate [Bal98]. In fact, the best fitting function is chosen in a set of parametric predefined PDFs based on decision criteria which depend on the first four moments of the random variable. Also using the first four moments of the random variable, Winterstein suggested to approximate the random variable by a third-order Hermite polynomial expansion of a standard normal random variable [Win87]. Er built a PDF generic approximation using an exponential of a polynomial model (EPM) where the coefficients of the polynomial are estimated using the first moments of the random variable [Er98]. Note that the estimation of the random variables moments is the most computationally expensive part of these set of methodologies. If the computational effort is prohibitive, one can make the most of Gaussian quadrature scheme [AS70] or Smolyak cubature formulas [Smo63, Kee04].

Zong and Lam developed a method that uses linear combinations of  $B$ -spline functions [ZL98, ZL00]. The coefficients of the combination are estimated based on a set of observations of the random variable to be approximated and update using a Bayesian approach. Nevertheless, they usually do not yield accurate enough results in comparison with the above alternative methodologies.

In [SC03], the applicability and the accuracy of Er's EPM is demonstrated in comparison with Pearson's and Winterstein's approximations. It motivated its direct use in initial developments of the proposed framework [HRL05, HLR05]. However, Berveiller *et al.* [BSL04, SBL06] recently proposed efficient random variable approximation methods using non intrusive polynomial chaos [GS91] expansion techniques. Benefiting from these new approaches, we implement a probabilistic node crossing procedure (Chapter 7) mainly based on a non intrusive polynomial chaos expansion obtained by a regression technique.

### Polynomial chaos expansion approach using regression

Each parameter  $X_k^{(l)}$  identified in the failure scenarios should be now represented by a random variable that results from the transformation  $M_k^{(l)}$  of  $r$  random variables  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}$  belonging to  $\mathbf{X}^{(l-1)}$ . Classical results [Mal97] allow the development of  $X_k^{(l)}$  as a series expansion of a vector  $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$  of  $r$  standard normal variables :

$$X_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Psi_j \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)} \right) \quad (2.6)$$

where  $\left\{ \Psi_j \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)} \right) \right\}_{j=0}^{\infty}$  are multidimensional Hermite polynomials that is the polynomial chaos (Annexe D). Each component of  $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$  is obtained from the isoprobabilistic transformation of its corresponding input random variable in  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}$  to the standard normal space :

$$\check{X}_{k,l}^{(l-1)} \rightarrow \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)} : F_{\check{X}_{k,l}^{(l-1)}} \left( \check{x}_{k,l}^{(l-1)} \right) = \Phi \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)} \right), \quad q = 1, \dots, r \quad (2.7)$$

where  $F_{\check{X}_{k,l}^{(l-1)}}$  denotes the CDF of  $\check{X}_{k,l}^{(l-1)}$  and  $\Phi$  the standard normal CDF. Equation 2.7 holds when the  $r$  random variables are independent. When dealing with correlated random variables, application of Nataf or Rosenblatt transformations [LDK86] allows us to come down to independent variables with some additional efforts. For practical matters, the series expansion in equation 2.6 is truncated and an approximation of  $X_k^{(l)}$  is given by :

$$X_k^{(l)} \approx \hat{X}_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{P-1} a_{j,k,l}^{(l-1)} \Psi_j \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)} \right) \quad (2.8)$$

where  $a_{j,k,l}^{(l-1)}$  are the coefficients to be determined,  $\{\Psi_j\}_{j=0}^{P-1}$  are the multidimensional Hermite polynomials of order less or equal than  $p$ ,  $r$  is the number of input random variables and  $P = \frac{(r+p)!}{r!p!}$  denotes the size of the polynomial chaos basis of order  $p$ . The  $a_{j,k,l}^{(l-1)}$  coefficients are computed using a least square minimization regression method that requires only a set of deterministic analysis [SBL06]. Let us denote  $\left\{ \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)} \right)^{[i]} \right\}_{i=1}^n$ ,  $n$  outcomes of the standard normal random vector  $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$ . For each outcome, the isoprobabilistic transformation in equation 2.7 yields a vector of input random variables  $\left( \check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)} \right)^{[i]}$ . The corresponding output  $\left( X_k^{(l)} \right)^{[i]} = M_k^{(l)} \left( \left( \check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)} \right)^{[i]} \right)$  can then be computed. The regression methods consists in finding the set of coefficients  $a_{j,k,l}^{(l-1)}$  that minimizes the difference :

$$\Delta X_k^{(l)} = \sum_{i=1}^n \left[ \left( X_k^{(l)} \right)^{[i]} - \left( \hat{X}_k^{(l)} \right)^{[i]} \right]^2 \quad (2.9)$$

which is done by solving an equivalent linear system explicitly written in [SBL06].

Once the approximation of the random variable  $X_k^{(l)}$  is available analytically through equation 2.8, its PDF  $f_{X_k^{(l)}} \left( x_k^{(l)} \right)$  can be obtained easily at almost no extra computational cost using either Monte Carlo simulation or FORM/SORM methods combined with importance sampling techniques. Actually, the critical point in this approach is to properly and efficiently select the sample or collocation points, that are the outcomes  $\left\{ \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)} \right)^{[i]} \right\}_{i=1}^n$ .  $n \geq P$  is required so that a solution to equation 2.9 exists. Isukapalli [Isu99] and Webster *et al.* [WTM96] choose for each random variable the  $(p+1)$

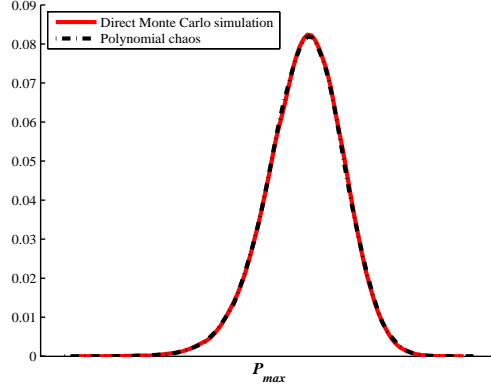


FIG. 2.9 – Probability density function of the maximum combustion pressure  $P_{max}$ .

roots of the  $(p + 1)$ -th order Hermite polynomial and built  $(p + 1)^r$  vectors of length  $r$  using all possible combinations. Then they select the  $n$  outcomes  $\left\{ \left( \xi_{k,l}^{(l-1)} \right)^{[i]} \right\}_{i=1}^n$  with the highest probability content out of these  $(p + 1)^r$  possible combinations such that  $n = P + 1$  (or  $n = 2(P + 1)$ ). However, no indication on the selection of the number  $n$  of combinations to be used could be found in the literature. In [SBL06], Sudret *et al.* propose to carry out a parametric study to investigate the influence of  $n$  onto the accuracy of the results. They derived an empiric rule stipulating that a number of points equal to  $(r - 1) \times P$  provides excellent accuracy both in the mean region and in the tail of the random variable PDF. As a result, such a technique is really interesting with respect to the computational cost issue. Alternatively, one should use a random DOE and make the most of latin hypercube sampling [MBC79, OSD03].

Applying this polynomial chaos node-crossing procedure to the phenomenological failure scenarios, we are able to monitor the aggregation and propagation of the uncertainties from the primary level to the *TE* level. In addition to the PDF approximation of all the parameters of the tree model, note that when the intermediate variables of the global model are potentially dependent we also compute their correlation coefficients. Given the polynomial expression of the random variables in equation 2.8, the correlation coefficients are easily evaluated analytically or by low cost Monte Carlo simulation. In figure 2.9, we illustrate the PDF approximation of the maximum combustion pressure  $P_{max}$  identified in the example defined in figure 2.5.  $P_{max}$  results from the combustion phenomenon which depends on eight parameters. The model that is used is the partial quadratic response surface given in the second column of table 2.1. This allows a validation by direct Monte Carlo simulation of the polynomial chaos approximation of PDF  $P_{max}$ .

Eventually, we build an evolutive and probabilistic reliability model based on system physics-of-failure and behavior modeling.



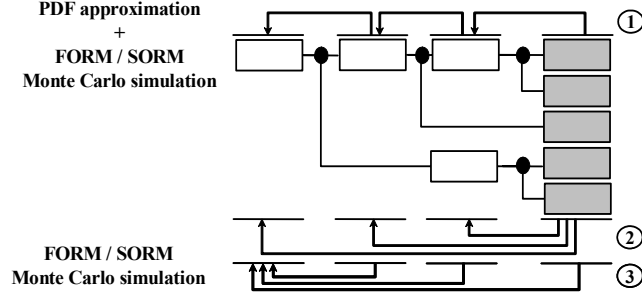


FIG. 2.10 – Reliability analysis strategy schemes.

## 2.3 Reliability evaluation, elaboration and optimization

### 2.3.1 Shortcut FORM/SORM analysis strategies

The first suggested analysis scheme (Type 1 in figure 2.10) corresponds to the most natural approach or strategy. It follows the construction of the probabilistic and phenomenological failure scenarios discussed in the previous section. The PDF of the nodal parameters as well as their correlation coefficients are determined on a level by level progression basis. On the one hand, directly from the PDF approximation of  $X_k^{(l)}$ , we are able to approximate the probability of failure :

$$P_{f_k}^{(l)} = \int_{G_k^{(l)}(\tilde{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l-1)}) \leq 0} f_{\tilde{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l-1)}}(\tilde{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l-1)}) d\tilde{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l-1)} \quad (2.10)$$

related to each performance function  $G_k^{(l)}$  defined in equation 2.4. On the other hand, the implementation of FORM following this type 1 analysis scheme leads to the evaluation of the parameters  $\mathbf{X}^{(l-1)}$  influence on each mechanical transformation  $M_k^{(l)}$  as well as on each performance function  $G_k^{(l)}$  and associated probability of failure  $P_{f_k}^{(l)}$ .

The second analysis scheme (Type 2 in figure 2.10) consists in performing upwards shortcut FORM/SORM analyses considering each node of the intermediate levels while considering the ground or primary level. First, we are able to validate the estimation of the probabilities of failure  $P_{f_k}^{(l)}$  performed during type 1 analysis. Secondly, we are able to evaluate the weights of the elementary parameters  $\mathbf{X}^{(0)}$  on the intermediate parameters  $\mathbf{X}^{(l)}$  as well as on each performance function  $G_k^{(l)}$  and associated probability of failure  $P_{f_k}^{(l)}$ .

The third analysis scheme (Type 3 in figure 2.10) consists in performing backwards FORM/SORM analysis considering each node of the  $TE$  level with respect to each intermediate level : the global influence of the intermediate parameters on the  $TE$  level is captured. Its complementarity with schemes n°1 and n°2 favors the construction of chains of importance measures.

### 2.3.2 Estimation of reliability measures

The multiple steps that are necessary to obtain the following reliability measures are detailed more in depth in chapter 8.

#### Probability of failure and reliability index

The probability of failure  $P_f^{(l)}$  and the reliability index  $\beta_k^{(l)} = -\Phi^{-1} \left( P_f^{(l)} \right)$ ,  $\Phi^{-1}$  being the inverse standard normal distribution, are measured with respect to their related to a performance function  $G_k^{(l)}(\mathbf{X}^{(l-1)})$ . They are approximated either classically performing FORM/SORM and Monte Carlo simulation approaches [Lem05b] directly on  $G_k^{(l)}$  (Annexe E) or using the polynomial chaos expansion of  $X_k^{(l)}$  and implementing FORM/SORM or Monte Carlo analyses on :

$$G_k^{(l)} = X_k^{(l)} - \gamma_k^{(l)} \approx \sum_{j=0}^{P-1} a_{j, k, l}^{(l-1)} \Psi_j \left( \xi_{k, l}^{(l-1)} \right) - \gamma_k^{(l)} \quad (2.11)$$

Table 2.2 gives the estimated probability of failure and reliability indexes for the *TE* limit state and performance criteria defined in figure 2.1, plus the performance criteria defined for  $P_{max}$ . Actually, they are normalized by non given targets probability of failure  $P_{f_{ref}}$  and reliability index  $\beta_{ref}$  so that the confidential aspect of the results is preserved.  $P_f / P_{f_{ref}} \approx 1$  means that the design meets the reliability objectives.  $P_f / P_{f_{ref}} > 1$  denotes that the proposed design is not satisfactory.  $P_f / P_{f_{ref}} < 1$  corresponds to designs which exceed their reliability specifications and may be optimized for cost purposes. Considering the example, the evaluation is made at an intermediate iteration of the embodiment design phase. At this stage, only the piston pin Out-of-Round wear performance criterion does not meet the reliability target while all the other criteria oversatisfy the objective. As a result, the design of the system needs to be improved during the subsequent design iterations. In the following, we show how the proposed analysis and its specific outputs efficiently participates in enhancing the design.

Limit state function				
	Pressure on the gasket	Max. boundary layer separation exceeding	Piston pin bending	Bosses critically loaded
$P_f / P_{f_{ref}}$	0.28	1.17	$5.2 \times 10^{-5}$	0.17
$\beta / \beta_{ref}$	1.20	0.98	2.12	1.26
Performance function				
	Pin out-of-round wear		Max. $P_{max}$ exceeding	
$P_f / P_{f_{ref}}$	91.1		$5.2 \times 10^{-3}$	
$\beta / \beta_{ref}$	0.87		1.67	

TAB. 2.2 – Probability of failure and reliability index.

### Limit states correlations and conditional probabilities of failure

In the context of a first order approximation of the performance functions, in addition to yield insight into their mutual correspondance, the evaluation of their correlation coefficients enable the evaluation of the conditional probabilities of occurrence of their related events. The linearized correlation coefficient between  $G_k^{(l)}$  and  $G_{k'}^{(l')}$  is classically given by :

$$\rho_{G_k^{(l)} G_{k'}^{(l')}} = \sum_{i=1}^{nva_0} \alpha_i^{(l/0)} \alpha_i^{(l'/0)} \quad (2.12)$$

where  $\alpha_k^{(l/0)}$  and  $\alpha_{k'}^{(l'/0)}$  are the normal unit vector of  $G_k^{(l)}$  and  $G_{k'}^{(l')}$  written in the standard normal space (Annexe E), considering the elementary level variables  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(0)}$  and  $\check{\mathbf{X}}_{k',l'}^{(0)}$ . Several events can be defined with respect to the realization of each performance function  $G_k^{(l)}$  of the reliability model. Basically, the pair of events  $\left(E_k^{(l)}, \overline{E_k^{(l)}}\right)$  can respectively be associated with the failure domain  $\mathcal{D}_{f_k}^{(l)}$  and the safe domain  $\mathcal{D}_{s_k}^{(l)}$ . Actually, knowing the reliability indexes  $\beta_k^{(l)}$  (stored in the vector  $\boldsymbol{\beta}$ ) and the correlation matrix  $\boldsymbol{\rho}$  (resulting from equation 2.12), it is possible to compute the probabilities of event unions and intersections :

$$\Pr\left(\bigcap_i E_i\right) = \Phi_n(-\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}) \quad (2.13)$$

$$\Pr\left(\bigcup_i E_i\right) = 1 - \Phi_n(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}) \quad (2.14)$$

where  $E_i$  corresponds to a particular event  $E_k^{(l)}$  or  $\overline{E_k^{(l)}}$ ,  $\beta_i$  is the associated reliability index and  $\Phi_n(-\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{-\beta_1} \int_{-\infty}^{-\beta_2} \dots \int_{-\infty}^{-\beta_n} \varphi_n(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\beta}$  is the multidimensional normal CDF with  $\varphi_n(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi^{n/2} \sqrt{\det(\boldsymbol{\rho})}} e^{(-\frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\rho}^{-1} \hat{\mathbf{u}})}$ . Subsequently, using the classical probability relation :

$$\Pr(E_i \cap E_j) = P(E_i | E_j) P(E_j) \quad (2.15)$$

we can derived a first order approximation of event conditional probabilities of occurrence given a sequence of occurred events :

$$\Pr\left(E_j \middle| \bigcap_i E_i\right) = \frac{\Pr\left(E_j \cap \left(\bigcap_i E_i\right)\right)}{\Pr\left(\bigcap_i E_i\right)} \quad (2.16)$$

$$\Pr\left(E_j \middle| \bigcup_i E_i\right) = \frac{\Pr\left(E_j \cap \left(\bigcup_i E_i\right)\right)}{\Pr\left(\bigcup_i E_i\right)} \quad (2.17)$$

The first part of table 2.3 illustrates the correlation between the limit states and the performance functions corresponding to the piston pin seizing criteria. They are

estimated at the same iteration of the embodiment design phase as before. These correlation coefficients are high but it is not surprising as the limit states we focus on result from a sets of design parameters that are dependent. The second part of table 2.3 shows their conditional probabilities of failures. For example, the probability that there is too much bending is multiplied by  $4 \times 10^2$  if the critical load on the pin bosses is exceeded. These results can be obtain for each limit state or performance function defined within the global reliability model. Note that the given conditional probabilities are also normalized with respect to the reference probability of failure.

Correlation	Bending	Bosses loading	OoR wear
Bending	1	0.617	0.947
Bosses loading	0.617	1	0.778
OoR wear	0.947	0.778	1

Conditional Probability/ $P_{f_{ref}}$	Bending	Bosses loading	OoR wear
Bending	$5.2 \times 10^{-5}$	56.68	93.17
Bosses loading	0.02	0.17	93.17
OoR wear	$5.3 \times 10^{-5}$	0.18	91.14

TAB. 2.3 – Events correlations and conditional probabilities of occurrence.

### 2.3.3 Chains of importance factors and sensitivity measures

Sensitivity measures and importance factors (Annexe E) are also evaluated in addition to the estimation of probabilities of failure and reliability indexes. They aim at identifying the potential evolution of a physical parameter or a reliability measure with respect to a small variation of any parameter of the physical models or any input design parameter.

The sensitivities of the transformations  $M_k^{(l)}$  or the performance functions  $G_k^{(l)}$  with respect to the reliability model parameters  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l')}$  of a lower level  $l'$  are classically given by :

$$s_{i \ k}^{(l)} = \left. \frac{\partial G_k^{(l)}}{\partial \check{x}_i} \right|_{\check{\mathbf{x}}_{rep}} = \left. \frac{\partial M_k^{(l)}}{\partial \check{x}_i} \right|_{\check{\mathbf{x}}_{rep}} \quad (2.18)$$

where  $\check{x}_i = \check{x}_{i \ k,l}^{(l')}$  and  $\check{\mathbf{x}}_{rep}$  is a point to be chosen by the analyst (*e.g.* the vector of the nominal values of the parameters of level  $l'$ ).

The sensitivities of the associated reliability measures  $P_{f \ k}^{(l)}$  and  $\beta_k^{(l)}$  with respect to the reliability model parameters  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l')}$  are classically given by :

$$\left. \frac{\partial \beta_k^{(l)}}{\partial \check{x}_i} \right|_{\check{\mathbf{x}}_{k,l}^{*(l')}} = - \sum_j \alpha_{j \ k}^{(l/l')} \left. \frac{\partial T_j^{(l')}\left(\check{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l')}\right)}{\partial \check{x}_i} \right|_{\check{\mathbf{x}}_{k,l}^{*(l')}} \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{\partial P_{f \ k}^{(l)}}{\partial \check{x}_i} \right|_{\check{\mathbf{x}}_{k,l}^{*(l')}} = -\varphi(\beta) \left. \frac{\partial \beta_k^{(l)}}{\partial \check{x}_i} \right|_{\check{\mathbf{x}}_{k,l}^{*(l')}} \quad (2.20)$$

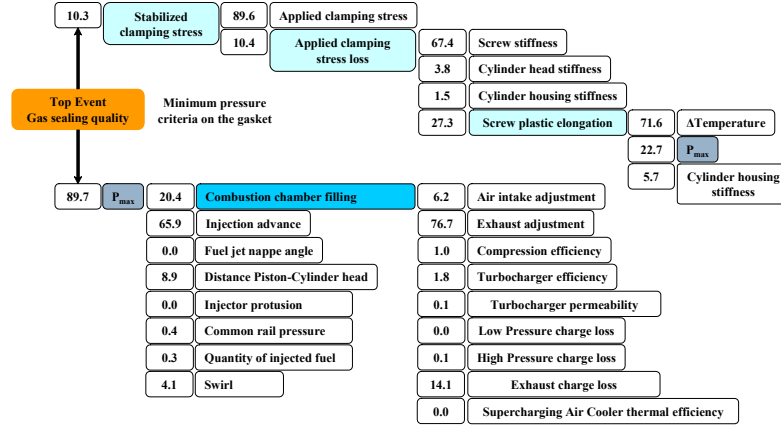


FIG. 2.11 – Gas sealing quality : chain of importance factors (%).

where  $\check{x}_i = \check{x}_{i, k, l}^{(l')}$ ,  $\check{u}_i = \check{u}_{i, k, l}^{(l')}$ ,  $\alpha_k^{(l/l')}$  is the normal unit vector of  $G_k^{(l)}$  considering the variable of level  $l'$ ,  $\mathbf{T}^{(l')}$  is the isoprobabilistic transformation such that the standard normal random variable  $U_j^{(l')} = T_j^{(l')}(\check{\mathbf{x}}_{k, l}^{(l')})$  and  $\varphi(\cdot)$  the standard normal PDF. These reliability sensitivities are evaluated at  $\check{\mathbf{x}}_{k, l}^{*(l')}$  that is to say the most probable failure point [Lem05b] considering  $G_k^{(l)}$ . Note that other sensitivity measures are available but not discussed in this synthesis (see chapter 8 and Annexe E for more details).

Coupling the three analysis strategies represented in figure 2.10 (in the order 1 - 3 - 2) and determining in each case the sensitivity measures by means of FORM analysis, we construct original chains of importance factors (Fig. 2.11) using classical chain rules of differentiation. As a result, we are able to capture :

- the global influence of any given parameter of the model on a higher level parameter or performance function and its associated reliability measures ;
- the partial influence of any given parameter through each of the failure mechanisms on which it has a potential impact.

Subsequently, we can identify the most critical parameters and mechanisms that is the most likely failure scenario considering the examined system failure mode. Figure 2.11 represents the simplified chains of importance measures relatively to the minimum pressure allowed on the gasket body ( $TE$  performance criteria defined in figure 3.4 and 2.5). It shows that  $P_{max}$  is the most influent parameter on the reliability of the system. Moreover, it is involved in more than one phenomenological sequences. However, the chain of importance factors emphasizes that its partial contribution in the upper branch is insignificant compared with its contribution in the lower branch. For reliability improvement purposes, if  $P_{max}$  can be controlled, then the chain in figure 2.11 shows that these are the injection advance and the combustion filling parameters that should be monitored and modify, first and foremost. If not, the analysis reveals that the phenomenological sequences ending with the applied clamping stress and the distance between the piston and the cylinder head (in this order of importance) should then be adapted or controlled when possible.

### 2.3.4 Design enhancement using reliability and sensitivity analyses

In the scope of design refinement, the feedback that the proposed reliability approach provides the mechanical designers with is of interest. Our goal is to emphasize the capacity of their precious results to help designers elaborating efficient modification and validation plans at each design iteration. In [RHFD04] and [TRF<sup>+</sup>06], Riha *et al.* and Thacker *et al.* proposed a redesign analysis based on the use of sensitivity factors to identify dominant parameters that improve components reliability if modified in a prescribe way. We suggest a similar approach to redesign analysis not only focusing on the failure modes but also looking closely to their failure scenarios.

Using the taken apart simplified example of the piston pin seizing, we demonstrate that the proposed approach can efficiently guide the design process of complex mechanical systems. The three piston pin seizing criteria, that are respectively the pin bending, its Out-of-Round wear and the critical load applied on its bosses, all depend on the same global set of design parameters :

- $B_p$ , the width of the connecting rod head.
- $E_b$ , the distance between the pin support areas of the piston head (bosses).
- $E_{axe}$ , the Young modulus of the piston pin.
- $D_{ext}$  and  $D_{int}$  , respectively the outer and inner diameters of the piston pin.
- $P_{max}$ , the maximum combustion pressure introduced earlier.
- $D_{cyl}$ , the cylinder diameter.
- $L$ , the length of the piston pin.

Here, for illustration purposes we consider that a design iteration consists of only one change in one identified design parameter. In real applications, at each design iteration, several parameters are notified for modifications that are compatible with both product performance criteria and product cost management. Additionally, the sensitivity of the reliability measures with respect to the parameters  $\theta_{M_k^{(i)}}$  of the nodal behavior models are not taken into account in the proposed illustration though they could be. Typically, they participate either in the validation of the model with respect to the system reliability evaluation or in the definition of necessary modeling refinement actions. Figure 2.12 illustrates the evolution of the piston pin normalized reliability with respect to the three seizing criteria, according to successive design modifications.

The first point corresponds to the results obtained while performing the proposed analysis onto a preliminary design of the system during its embodiment phase (Tab. 2.4). For example, at this stage the Young modulus is roughly stochastically modeled by its tolerance interval which representativeness degree is 1 (Fig. 2.8).

These results are far from being acceptable regarding the required reliability objectives. Figure 2.13 shows the elasticities (*i.e.* the normalized version of the importance

	Out-of-Round wear	Bending	Load on bosses
$P_f / P_{f_{ref}}$	89.50	28.23	13.43
$\beta / \beta_{ref}$	0.76	0.22	0.46

TAB. 2.4 – Reliability level at iteration 1.

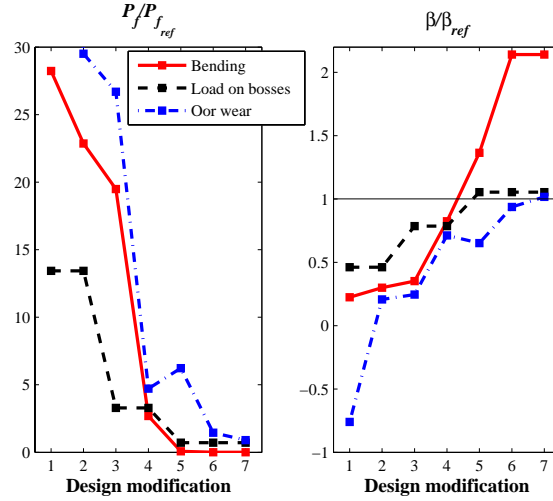


FIG. 2.12 – Evolution of the piston pin reliability with respect to the seizing criteria.

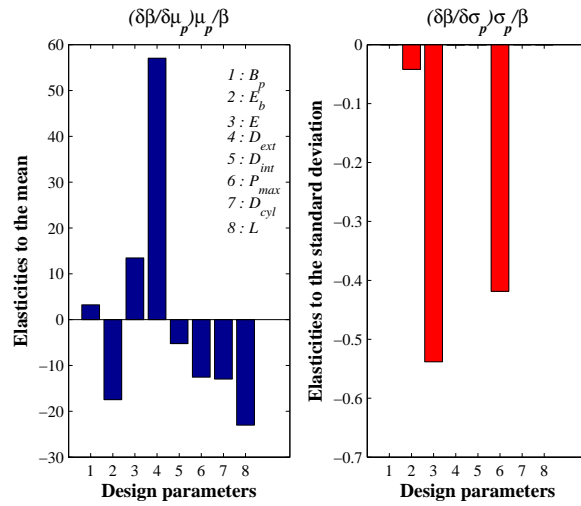


FIG. 2.13 – Elasticities of  $\beta^{(bending)}$  after the first design proposition.

factors defined in equation 2.19) of the Piston pin bending reliability index with respect to the design parameters mean and standard deviation. Obviously, it is highly sensitive to several parameters and thus there are more than one lever for reliability improvement. Basically, such results inform the designers that increasing the mean of  $D_{ext}$  or decreasing the mean of  $L$ ,  $E_b$ ,  $D_{cyl}$ ,  $P_{max}$  would have a positive impact on the reliability of the system with respect to the bending criteria. They also inform the designers as well as the statisticians that checking and controlling the standard deviation of  $E$ ,  $P_{max}$  and  $E_b$  would improve the reliability too. In practice, design modification choices are decided based on a complex trade-off that is constrained by numerous criteria such as cost, manufacturing, development time, reliability, etc. Adopting a multi failure mode approach, the elasticities for the different failure modes are used jointly with the estimation of the correlation coefficients between limit states (Eq. ??), their associated conditional probabilities of failure (Eqs. 2.16 and 2.17) in order to pilot effective design modifications. Here, the first resulting action consists in reducing the mean of  $D_{int}$ . The reliability results are gathered in table 2.5.

	Out-of-Round wear	Bending	Load on bosses
$P_f / P_{f_{ref}}$	29.50	22.86	13.43
$\beta / \beta_{ref}$	0.21	0.30	0.46

TAB. 2.5 – Reliability level at iteration 2.

Given the elasticities and the correlation of the three limit state functions at each subsequent design modification step, consecutively, the standard deviation of  $P_{max}$  is reduced, the poor primary stochastic model of the Young modulus  $E_{axe}$  is improved and its mean as well as standard deviation are modified, the length  $L$  of the piston pin and the distance  $E_b$  between the bosses are reduced. After 7 iterations, the reliability of the system with respect to the three limit state functions of interest exceed the target reliability level (Tab. 2.6). Note that the design is even highly reliable with respect to the bending criterion. Mainly for economical matters, subsequent modifications might be decided in order to obtain a less expensive design which reliability just equals the specified objectives.

	Out-of-Round wear	Bending	Load on bosses
$P_f / P_{f_{ref}}$	0.90	0.00	0.71
$\beta / \beta_{ref}$	1.02	2.14	1.05

TAB. 2.6 – Reliability level at iteration 7.

These briefs and straightforward illustrations on a simplified application reveal the potential of the proposed approach to enhance the interactions between mechanical reliability analysis and the other activities of the design process. The proposed approach gives strong arguments to the mechanical designers for performing essential redesign actions or modeling refinement with respect to the reliability point of view (Chapter 8). As an additional result, the robustness of the system is also improved following these reliability-based action plans as they participate in reducing the sensitivity of the system and its reliability to the design parameters and their uncertainties.



## **2.4 Summary and conclusions**

Efficient approaches to mechanical design for reliability require the implementation of a set of guidelines and methodologies at the different stages and iterations of a product design process. In this synthesis, we emphasize the need :

- to extend the use of structural reliability analysis to the early iterations of the preliminary design no matter how rough the knowledge on the physical models and their inputs characterization may be.
- to take better into account the physical meaning of the failure scenarios and the physics-of-failure propagation when estimating system reliability. In that sense, the quantitative interpretation in terms of logical or state-space analysis is not sufficient. They do not allow the analysts to capture the impact of the elementary design parameters on the failure modes through the multiple failure scenarios which they participate in.

As a result, a multi-discipline viewpoint is adopted to develop an evolutive and probabilistic reliability approach based on the comprehensive physical modeling of the system failure scenarios :

1. It is based on the construction of original qualitative failure mechanisms which establish the physical links between the failure modes of the mechanical system and the elementary design parameters. A procedure that aims to integrate the models of the physical phenomena at each node of the tree and the probabilistic models of the input design parameters is discussed. Mathematical representation of the physical phenomena and limit state characterization are obtained by means of metamodels and models of expertise which are refined during the design process as the knowledge is broadened. The probabilistic models of the design parameters are updated according to the available knowledge using a Bayesian framework. The resulting flexibility of the proposed reliability model enables its use from the start of the preliminary design stage.
2. Its evaluation is based on original analysis strategies that use common structural reliability methods (FORM/SORM and polynomial chaos expansion). Reliability measures such as probability of failure and sensitivity measures are classically computed. In addition, we introduce the concept of shortcut FORM/SORM analyses which allows us to compute conditional probabilities and above all to define useful chains of importance factors.
3. It also contributes to design optimization by reliability. Indeed, at each iteration of the embodiment or the detail stages of the design process, it enhances the synergies between the reliability engineers, the designers, decision-makers and the other actors of the design providing them with :
  - the characterization of the physical phenomena and the design parameters that impact the most the reliability of the system ;
  - the identification of the suitable design levers and the way of activating them to improve the reliability of the system ;
  - the guarantee, based on the available information or knowledge, that the various design choices and modifications will allow the convergence of the system towards the required reliability level.

The suggested *system and physical* reliability approach rapidly lead to the numerical evaluation of complex models that are prohibitive to manipulate and to evaluate manually. Hence, we developed RELAB, a software platform implemented in the Matlab<sup>®</sup> environment (introduced in chapter 9) that aims at :

- orchestrating the definition of such reliability models.
- piloting their automatic evaluation.

Moreover, it assures the popularization of the proposed reliability framework in an attempt to convince definitively the actors of an industrial design process that they should benefit more from its potential.

All the major aspects of the proposed design for reliability methodology are detailed more in depth in the following chapters. One should now follow the reading paths that best suit his expectation.

Eventually, let us conclude this synthesis by saying that the preliminary results of this research work have already shown lots of interest. Actually, they are expected to foster the applicability of the proposed approach in industrial practices. Obviously, some aspects of the proposed approach are yet perfectible. The perspectives for improvement are comprehensively listed and discussed in chapter 10. Here, we simply introduced some of them :

- From an academic point of view :
  1. The proposed probabilistic and phenomenological failure scenarios consist in a first step towards the development of mechanical systems reliability analysis which would benefit more from both *system without physics* and *physical without system* reliability analyses. Possibly, it could be further used to develop more unified quantitative reliability interpretations and validations of complex systems (*e.g.* mecatronic systems) based on numerical simulations.
  2. There is still a need for more accurate and less time-consuming techniques to approximate random variables that result from complex transformation of numerous random variables. Several research studies are currently being undertaken on that specific subject. In particular, the use of machine learning techniques is examined [DL06].
  3. There is also matter for further research to better assess the uncertainties that are inherent to the construction of models of expertise and meta-models. Obviously, the challenge is to integrate them into the process of system reliability evaluation. Parametric probabilistic approaches generally yield results that are insufficiently accurate. Thus, non-parametric methods seems the most attractive [Soi05].
  4. The suggested design enhancing procedure using reliability and sensitivity analyses relies on an expert approach. One would most benefit from its computerization.
- From an industrial point of view, the critical issue relies on the management of data and engineering knowledge. Indeed, efforts must be made to collect and capitalize data as well as knowledge on both design parameters and systems physics-of-failure or mechanical behavior. The challenge consists in reusing them easily, automatically and efficiently when designing new applications.

## Chapitre 3

# Exemple conducteur : un sous-système mécanique de moteur Diesel d'automobile

### 3.1 Principes de fonctionnement d'un moteur Diesel

#### 3.1.1 Moteurs conventionnels et alternatives

Depuis son invention, l'automobile est essentiellement tractée ou propulsée au moyen d'un moteur thermique à combustion interne, à 4 temps, qui peut être alimenté à l'essence (moteur à allumage commandé) ou au gazole (moteur Diesel<sup>1</sup>). Un moteur d'automobile conventionnel (figure 3.1) est constitué de plusieurs chambres de combustion. Chacune d'entre elles est délimitée par la culasse, le cylindre et le piston. Le moteur à combustion n'est autre qu'un transformateur d'énergie chimique en énergie mécanique. La combustion du mélange carburé (mélange air - essence / air - gazole) dans chacune des chambres se traduit, à chaque cycle, par une élévation de pression des gaz (pression de combustion) qui permet de mettre en mouvement le piston et le système bielle - manivelle et ainsi de transformer un mouvement rectiligne alternatif (déplacement d'un piston) en un mouvement rotatif (rotation du vilebrequin). Le vilebrequin, connecté aux organes mécaniques de transmission (boîte de vitesses, arbres de transmission etc.), assure ensuite l'entraînement des roues du véhicule ; leur vitesse de rotation est adaptée à celle du moteur au moyen de la boîte de vitesses.

La puissance maximale que doit fournir le moteur est déterminée par la masse du véhicule (afin de lutter contre l'inertie liée à son poids), sa vitesse maximale (afin de vaincre la résistance à l'avancement dans l'air) et son agrément d'utilisation (*e.g.* potentiel d'accélération). Ses performances dépendent essentiellement de la quantité d'énergie dégagée par la combustion, donc de la quantité de mélange carburé présente dans la chambre de combustion. Elles sont directement liées au volume de la chambre (cylindrée unitaire) et au nombre de cylindres du moteur (cylindrée totale).

---

<sup>1</sup>Du nom de l'inventeur Rudolf Diesel qui dans le courant des années 1890 développa l'idée d'un moteur thermique dont la combustion est initiée au moyen d'une forte compression du mélange air - carburant, éliminant ainsi la nécessité d'un allumage commandé par une étincelle.

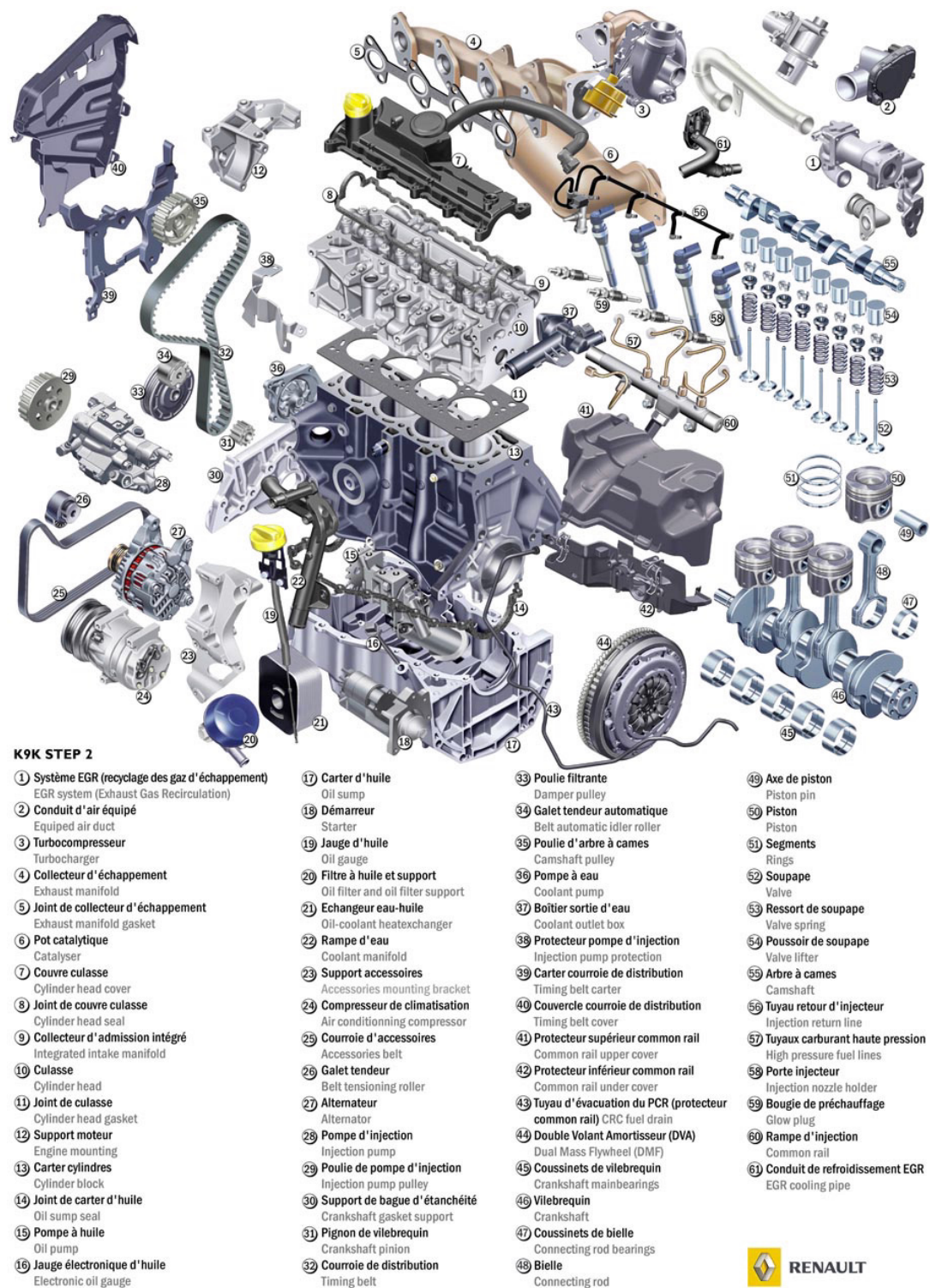


FIG. 3.1 – Exemple d'architecture de moteur Diesel.

Le rendement d'un moteur se mesure comme le rapport entre l'énergie fournie au moteur (énergie chimique contenue dans le carburant) et l'énergie mécanique restituée. Dans des conditions optimales de fonctionnement (utilisation du moteur à charge élevée), un moteur automobile offre aujourd'hui un rendement maximal de l'ordre de 36% pour un moteur à essence et de 42% pour un moteur Diesel. Cependant, en règle générale, les véhicules automobiles sont utilisés sur de petits parcours en agglomération, ce qui se traduit finalement par une sollicitation des moteurs à faibles charges. Dans ces conditions, le rendement se trouve dégradé avec des valeurs n'atteignant que 15%. Une des voies de progrès, visant à accroître les rendements des moteurs dans toutes les conditions d'utilisation des véhicules, repose sur le concept du *downsizing*. Celui-ci consiste à réduire la cylindrée du moteur (donc sa taille et son poids), en conservant un niveau de performance équivalent à un moteur de plus forte cylindrée au moyen de la technique de suralimentation (turbocompresseur). Cependant, il s'accompagne d'une augmentation non-négligeable des contraintes thermomécaniques (c'est-à-dire de la pression de combustion  $P_{max}$  et de la température des gaz de combustion et d'échappement) subies par les moteurs. Ceci renforce la nécessité de mettre en œuvre des analyses prévisionnelles adéquates dans le but d'élaborer et de valider leur fiabilité dès les premières étapes du processus de conception et jusqu'aux phases ultimes de leur industrialisation.

Parallèlement aux améliorations continues apportées à ces moteurs conventionnels, il est important de souligner que des solutions alternatives sont en cours de développement, notamment pour réduire la consommation et les émissions de particules. On distingue essentiellement le véhicule à moteur à gaz naturel, le véhicule électrique, le véhicule hybride équipé d'un système de motorisation mixte thermique/électrique et le véhicule à hydrogène.

Dans la suite, nous nous intéressons au cas spécifique des moteurs à combustion interne de type Diesel.

### 3.1.2 Le cycle thermodynamique Diesel à 4 temps

Le fonctionnement du moteur Diesel repose sur le principe de la transformation de l'énergie calorifique du carburant en énergie mécanique selon un cycle thermodynamique théorique de Beau de Rochas et réel de Sabathé ([Mak02, Bos06]) nécessitant 4 temps (figure 3.2) :

1. **Admission (Remplissage du cylindre).** Le piston descend et aspire l'air frais.
2. **Fermeture de soupape - Compression.** Le piston remonte comprimant l'air pur de manière adiabatique (sans échange de chaleur avec les parois). En fin de compression, le carburant est introduit directement dans le cylindre par injection. Le mélange s'enflamme spontanément, sans étincelle, la compression isochore (sans changement de volume) provoquant une élévation de la température.
3. **Combustion - Détente - Ouverture de soupape.** La combustion se développe et l'expansion des gaz brûlés se réalise de manière adiabatique. Le piston est repoussé vers le bas, l'énergie chimique est transformée en énergie mécanique.
4. **Echappement (Vidange des gaz brûlés du cylindre).** Le piston remonte et évacue les gaz brûlés.

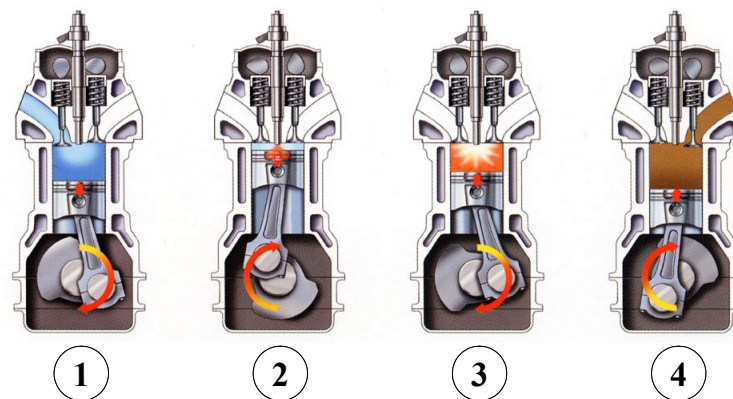


FIG. 3.2 – Les 4 temps du cycle thermodynamique d'un moteur Diesel.

Chaque temps correspond à un demi-tour de rotation du vilebrequin (une montée ou une descente du piston).

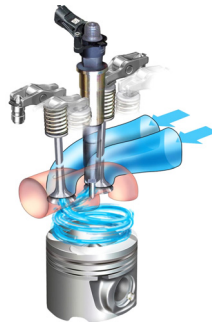
### 3.1.3 Spécificités de la combustion Diesel

#### Préparation du mélange air / gazole

Pour réaliser une combustion complète d'1 g de carburant conventionnel, il faut, en théorie, environ 14,6 g d'air. Ce mélange idéal est appelé mélange stoechiométrique. A l'instar des moteurs à essence qui fonctionnent en grande majorité à la stoechiométrie, les moteurs Diesel fonctionnent avec un excès d'air. Le gazole est injecté sous pression au moyen d'un injecteur dans une masse d'air préalablement comprimée. L'injecteur a pour but de pulvériser finement le gazole et doit rester étanche en dehors des temps d'injection. Aujourd'hui, l'injection se fait, en général, directement dans la chambre de combustion. C'est ce qu'on appelle l'injection directe. Ceci permet d'augmenter le rendement du moteur en limitant les pertes thermomécaniques. En outre, l'utilisation d'une rampe commune d'injection (*common rail*) vise à parfaire la combustion dans le but de réduire la consommation. Une pompe envoie le carburant dans la rampe à partir de laquelle les injecteurs sont alimentés. La forte pression (minimum 1300 bars) favorise le mélange air-carburant et assure une meilleure pulvérisation. Toutefois, l'énergie apportée par l'injection de carburant ne permet bien souvent pas d'obtenir suffisamment rapidement le mélange souhaité. Aussi, il est préférable de générer en plus, des mouvements d'air tourbillonnaires appelés *swirl* (figure 3.3). Il s'agit d'un mouvement cohérent imposé à l'air dans la chambre de combustion afin d'améliorer son amenée dans le jet de carburant. Il est typiquement induit par :

- la conception particulière des conduits d'admission de la charge d'air ;
- la géométrie de la chambre et en particulier la forme du bol de piston ;
- le mouvement du piston dans le cylindre.

Enfin, le turbocompresseur améliore aussi le remplissage des cylindres. Les gaz d'échappement entraînent une turbine reliée à un compresseur monté sur le circuit d'admission d'air : l'air injecté dans le moteur est comprimé par sa vitesse de rotation.

FIG. 3.3 – *Swirl*.

### Déroulement de la combustion

L'injection de gazole dans l'air comprimé (*i.e.* à température élevée) de la chambre de combustion initie la combustion par auto-inflammation (allumage par compression). Il en résulte une explosion spontanée qui dispense donc d'un circuit d'allumage avec bougies (cas du moteur à essence). Le délai d'inflammation, caractéristique du temps qui s'écoule entre le début de la préparation du mélange et le début de la réaction exothermique (initiation de l'allumage), est déterminé entre autre par l'indice de cétane du gazole. La combustion est dite stratifiée ou hétérogène car elle a lieu dans un milieu constitué à la fois de zones très riches en carburant (situées notamment près du nez d'injecteur) et de zones très pauvres, voire sans carburant (près de la paroi du cylindre).

#### 3.1.4 Les émissions polluantes et leur post-traitement

Les principales émissions de la combustion Diesel sont les fumées et les particules. Elle produit également du monoxyde de carbone ( $CO$ ), des hydrocarbures imbrûlés ( $HC$ ), de l'oxyde d'azote ( $NOx$ ). L'ensemble de ces émissions est réglementé et il est donc indispensable de les maîtriser. Enfin, un moteur Diesel émet aussi du dioxyde de carbone ( $CO_2$ ). Même s'il n'est pas réglementé au niveau des transports, il fait l'objet d'un engagement d'objectifs de réduction de la part des constructeurs car il est le principal responsable de l'augmentation de l'effet de serre à l'échelle de la planète.

Le post-traitement correspond à l'étape qui consiste à transformer les gaz d'échappement, entre le moteur et le pot d'échappement, pour obtenir des émissions de gaz moins polluants. Celui des moteurs Diesel est aujourd'hui réalisé au moyen :

- d'un pot catalytique qui convertit principalement le  $CO$ , les  $HC$  et les  $NOx$ , et réduit également les fractions organiques solubles présentes sur les particules ;
- d'un filtre à particules qui stocke les particules puis les brûle périodiquement (à intervalle kilométrique régulier) dans des conditions maîtrisées.

On peut ajouter que de nouvelles technologies sont en cours de développement pour améliorer encore le traitement des émissions, parmi lesquelles on peut citer les pièges à  $NOx$  ou encore le principe *SCR* de réduction par catalyse sélective avec injection d'urée. Deux voies semblent se dégager et sont déjà plus ou moins exploitées :

- l'optimisation des combustions traditionnelles au travers de la mise en œuvre de



- nouvelles technologies (injection, suralimentation, recirculation des gaz d'échappement - *EGR*, optimisation des chambres de combustion) ;
- la mise en œuvre de nouveaux modes de combustion homogène (combustion *HCCI* - *Homogeneous Charge Compression Ignition* [CG06]).

## 3.2 Périmètres étudiés et éléments de modélisation

### 3.2.1 Description générale

Notre objectif ici consiste à isoler plusieurs périmètres d'un moteur Diesel, en interaction les uns avec les autres, afin d'illustrer les différents aspects de la méthodologie proposée ainsi que les différents outils qui s'y rattachent. La figure 3.4 schématise les périmètres sélectionnés ainsi que leurs liens. Les problématiques de l'étanchéité aux gaz au niveau du joint de culasse et du grippage de l'axe de piston dû à ses déformations sont examinées. Elles sont analysées par rapport à la séquence de phénomènes qui impacte successivement le remplissage de la chambre de combustion, la combustion, le comportement de l'attelage mobile (en particulier du piston et de son axe) et le comportement de l'assemblage culasse / joint de culasse / carter-cylindres pour le point de fonctionnement le plus sollicitant du moteur Diesel considéré d'un point de vue thermomécanique, à savoir le point de pleine charge à 4000 tr/min.

L'étanchéité aux gaz au joint de culasse est validée au regard du respect de deux critères. Le premier fixe une valeur de débit de fuite de gaz maximum acceptée au niveau du cylindre et des sertissages (stoppeurs) du joint. Ce débit de fuite est assimilé dans la suite, à des fins simplificatrices, à un débatement de la culasse par rapport au joint. Le second fixe une valeur de pression minimum devant être exercée par la culasse sur les nervures gaz du joint de culasse.

Le grippage se manifeste par un soudage de deux surfaces en contact. Généralement initié par échauffement, il s'agit en fait d'un transfert de matière arrachée sur chacune de ces surfaces et redéposée par microsoudure. Il résulte ici d'une dégradation du frottement de glissement entre l'axe de piston et son logement dans la tête de piston : la lubrification ne pallie plus la destruction des couches superficielles due à la pression

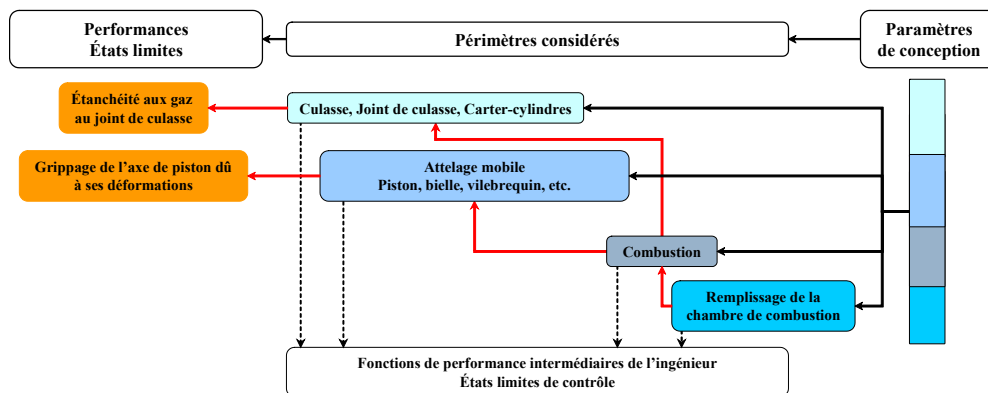


FIG. 3.4 – Schéma simplifié de l'exemple global considéré.



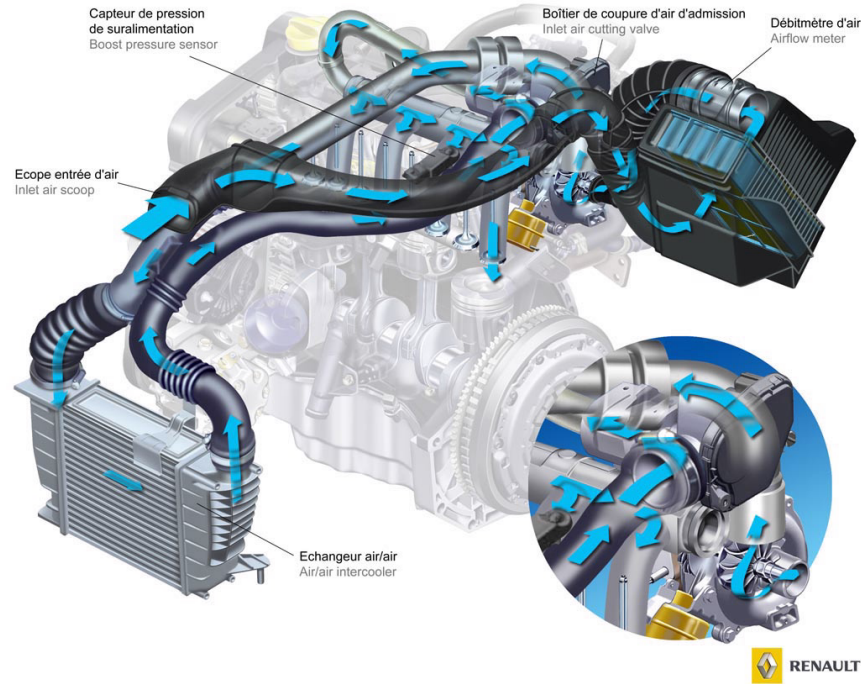


FIG. 3.5 – Illustration du circuit d'admission d'air d'un moteur Diesel.

agissant sur l'axe et à ses déformations. L'aspect lubrification n'est pas abordé dans le cadre de nos travaux. Le grippage est étudié vis-à-vis de la flexion de l'axe de piston, de sa dégradation par ovalisation et de la charge qui s'exerce sur les bossages de l'axe.

Sans toutefois trop rentrer dans le détail de leur modélisation, les principes fondamentaux des périmètres étudiés et des phénomènes physiques qui leur sont associés sont maintenant précisés.

### 3.2.2 Remplissage en air de la chambre de combustion

L'alimentation en air du moteur et de ses cylindres est assurée par un circuit dédié (Fig. 3.5). L'écope prélève l'air nécessaire à l'alimentation du moteur. Après filtration, la pression de l'air est augmentée par le turbocompresseur, dont sont équipés la plupart des moteurs Diesel actuels. Cette opération provoque une élévation de sa température. Un échangeur air/air (également appelé Refroidisseur d'Air Suralimenté - RAS) a donc pour mission de réguler cette surchauffe liée à la compression. L'air est ensuite dirigé vers les soupapes d'admission. Un débitmètre ainsi qu'un capteur de pression et de température informent en permanence le calculateur de gestion du moteur sur l'état du circuit d'air afin qu'il puisse optimiser son fonctionnement.

Ici, nous étudions le remplissage en  $O_2$  des cylindres et plus précisément la masse d' $O_2$  enfermée dans les chambres avant chaque combustion. La valeur de cette masse est impactée par la variabilité et les incertitudes de caractérisation du débit d'air  $Q_{air}$  (exprimé en  $kg \cdot h^{-1}$  ou en  $mg \cdot cp^{-1}$  - milligramme par coup), de la quantité injectée de carburant  $Q_{carb}$  (exprimée en  $mm^3 \cdot cp^{-1}$ ) et du taux  $T_{xGBR}$  de Gaz Brûlés Rési-

duels (GBR). Elle est calculée de manière analytique à partir de ces trois grandeurs en utilisant classiquement les décompositions massique et molaire du mélange carburé contenu dans la chambre de combustion ainsi que des données supposées constantes et déterministes comme le rendement de combustion ou encore la masse volumique du carburant. La variabilité et les incertitudes de caractérisation du débit d'air  $Q_{air}$  résultent de celles des paramètres décrits dans le tableau 3.1 et des phénomènes physiques associés. Selon les objectifs de l'analyse et la précision souhaitée, ce débit d'air peut être évalué au moyen de modèles plus ou moins complexes et coûteux en temps de calcul. Nous exploitons dans la suite un modèle défini implicitement au moyen d'un code de calcul  $1D$  et d'un métamodèle (modèle simplifié du modèle) de type surface de réponse quadratique (le concept de métamodèle est détaillé au chapitre 6).

Paramètre	Unité	Description
Pertes de charges Basse Pression (BP)	MPa	Elles prennent en compte les pertes entre l'écope et le compresseur du turbo (alignement imparfait entre les divers conduits, filtre à air).
Pertes de charges Haute Pression (HP)	MPa	Elles prennent en compte les pertes entre la sortie du compresseur et la culasse (RAS et positionnement du circuit EGR, du répartiteur par rapport à la culasse).
Pertes de charges à l'échappement	MPa	Elles prennent en compte les pertes dues à la descente des gaz dans le circuit d'échappement (catalyseur, filtre à particules, etc).
Efficacité thermique du Refroidisseur d'Air Suralimenté (RAS)	K	Les performances thermiques du RAS peuvent être à l'origine d'une variation de la température de l'air à sa sortie.
Calage à l'admission	-	Le calage à l'admission prend en compte l'ensemble des causes impactant directement les lois de levées de soupape d'admission définies pour un cycle moteur ( <i>e.g.</i> jeux de positionnement et défauts géométriques des linguets ou des boutons poussoirs et de l'arbre à cames).
Calage à l'échappement	-	Le calage à l'échappement prend en compte l'ensemble des causes impactant directement les lois de levées de soupape d'échappement définies pour un cycle moteur.
Rendement turbine turbo	-	Il dépend de la capacité de la turbine à optimiser le flux des gaz d'échappement.
Rendement compresseur turbo	-	Il dépend de la capacité du compresseur à optimiser le flux d'air en direction du répartiteur d'air.
Perméabilité de la turbine du turbo	-	Elle caractérise sa capacité à laisser passer les gaz.

TAB. 3.1 – Paramètres impactant le remplissage en air des cylindres à l'ordre 1.

### 3.2.3 Combustion et pression de combustion maximum

Paramètre	Unité	Description
Avance à l'injection (AVI)	°V	L'AVI, mesurée relativement à la position en degré du vilebrequin, détermine le moment de la pré-injection nécessaire à la réduction du bruit de type "cognement" et à la réduction des émissions générées au cours de la combustion.
Angle de nappe (AN)	°	Ces paramètres définissent la position des jets de carburant dans la chambre de combustion.
Distance Piston Culasse (DPC)	mm	
Dépassement d'injecteur (NTP)	mm	
Pression rail	bar	Elle mesure la pression du carburant dans le circuit en amont des injecteurs.
Quantité de carburant injectée	mm <sup>3</sup> .cp <sup>-1</sup>	Elle définit la quantité de carburant injectée à chaque levée de l'aiguille de l'injecteur.
Remplissage en O <sub>2</sub>	mg	Il définit la quantité d'O <sub>2</sub> disponible dans la chambre pour la combustion.
Taux de <i>swirl</i>	-	Il caractérise le mouvement tourbillonnant de l'air injecté dans la chambre.

TAB. 3.2 – Paramètres impactant le phénomène de combustion à l'ordre 1.

Le phénomène de combustion est par nature très complexe. De la même manière que pour la caractérisation du remplissage en O<sub>2</sub> de la chambre de combustion, nous nous intéressons essentiellement aux paramètres dont la variabilité et les incertitudes de caractérisation impactent à l'ordre 1 celles de la combustion, et en particulier celles de la pression de combustion  $P_{max}$  qui en émane. Ces paramètres sont répertoriés dans le tableau 3.2. Les autres paramètres (*e.g.* pression et température atmosphériques, encrassement injecteur et vanne EGR) ne sont pas tous mentionnés explicitement ici. En revanche, ils sont bien pris en compte de manière déterministe dans les modèles mis en œuvre dans le cadre de nos analyses. Selon les objectifs de l'analyse et la précision souhaitée, ce phénomène de combustion peut être caractérisé au moyen de modèles plus ou moins complexes et coûteux en temps de calcul. Dans la suite, on exploite un modèle implicitement défini au moyen d'un code de calcul 3D spécifique et des métamodèles de type surface de réponse quadratique. Nous examinons ici uniquement à la réponse en  $P_{max}$  du modèle ; mais il faut bien garder à l'esprit qu'il permet aussi de générer et d'analyser un certain nombre d'autres sorties telles que les émissions de polluants (*CO*, *HC* et *NOx*), de particules (suies) et de bruit.

Une fonction de performance dite de l'ingénieur ou de contrôle, notée  $G_{P_{max}}$ , permet de distinguer les valeurs de  $P_{max}$  inacceptables, car supérieures à un seuil  $S_{P_{max}}$  spécifique renseigné par les experts du contrôle moteur Renault ( $G_{P_{max}} \leq 0$ ), de celles qui sont acceptables ( $G_{P_{max}} > 0$ ). Dans ce cas, cette fonction d'état limite s'écrit simplement :

$$G_{P_{max}} = S_{P_{max}} - P_{max} \quad (3.1)$$

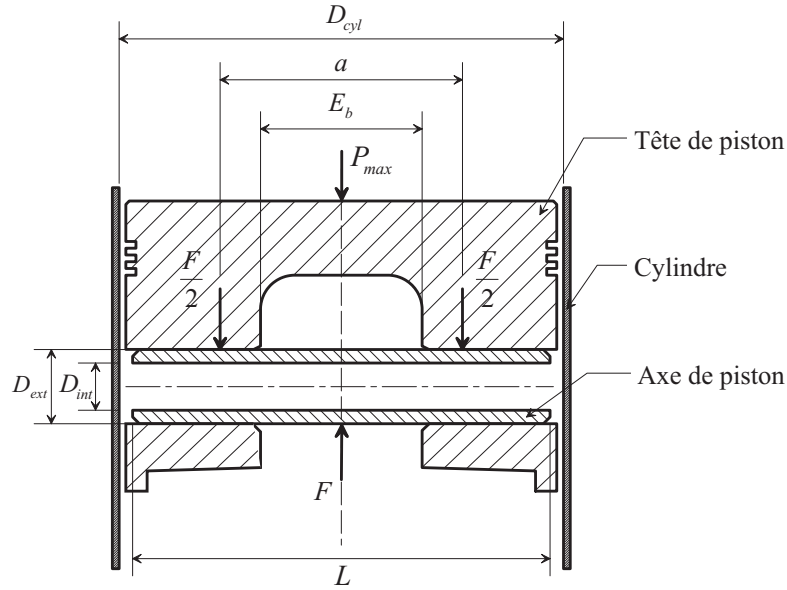


FIG. 3.6 – Vue simplifiée d'un piston et de son axe.

### 3.2.4 Grippage par déformations de l'axe de piston

Le grippage par déformations de l'axe de piston (figure 3.6) résulte des sollicitations générées par la pression de combustion et en particulier de celles issues de  $P_{max}$ . Leurs effets se manifestent principalement par la flexion et l'ovalisation de l'axe ainsi que par un chargement important au niveau des bossages de l'axe. A des fins simplificatrices, nous adoptons une modélisation du problème reposant sur une formulation analytique de type résistance des matériaux (modèle essentiellement exploitable au cours des phases de pré-dimensionnement du système). Les paramètres de dimensionnement relatifs à la conception du système axe de piston vis-à-vis du grippage sont décrits dans le tableau 3.3. Un certain nombre de paramètres intermédiaires est obtenu à partir des paramètres de base. Ils sont définis dans le tableau 3.4.

Paramètre	Unité	Modèle
Diamètre de l'alésage du cylindre	mm	$D_{cyl}$
Pression de combustion maximum	MPa	$P_{max}$
Distance entre les bossages d'axe	mm	$E_b$
Largeur de la tête de bielle	mm	$B$
Longueur de l'axe	mm	$L$
Diamètre extérieur de l'axe	mm	$D_{ext}$
Diamètre intérieur de l'axe	mm	$D_{int}$
Module d'Young de l'axe	MPa	$E_{axe}$

TAB. 3.3 – Paramètres impactant à l'ordre 1 les déformations de l'axe de piston.

Paramètre	Unité	Modèle
Rayon moyen de l'axe	mm	$R_{moy} = (D_{ext} + D_{int}) / 4$
Moment polaire d'inertie de l'axe	mm <sup>4</sup>	$I_o = L (D_{ext} - D_{int})^3 / 96$
Effort sur l'axe	N	$F = P_{max} \pi (D_{cyl}/2)^2$
Portance utile des bossages d'axe	mm	$A = L - E_b - 2$
Distance inter-effort $F/2$	mm	$a = E_b + 2 + A/3$

TAB. 3.4 – Paramètres intermédiaires de conception de l'axe de piston.

### Ovalisation de l'axe

L'ovalisation de l'axe  $\Delta d$  est définie de manière analytique par la relation :

$$\Delta d = \frac{F R_{moy}^2}{12 E_{axe} I_o} \quad (3.2)$$

Une fonction d'état limite établie à partir d'une règle de dimensionnement permet de distinguer les valeurs d'ovalisation acceptables de celles qui ne le sont pas. Autrement dit, elle différencie les valeurs d'ovalisation qui entraînent un grippage de l'axe de piston ( $G_{ovalisation} \leq 0$ ) de celles pour lesquelles le grippage ne se produit pas ( $G_{ovalisation} > 0$ ). Dans ce cas, cette fonction d'état limite s'écrit simplement :

$$G_{ovalisation} = S_{ovalisation} - \Delta d \quad (3.3)$$

où  $S_{ovalisation}$  est une variable seuil déterminée par l'expérience métier Renault.

### Charge critique supportée par les bossages d'axe

La charge critique supportée par les bossages d'axe est définie de manière analytique par la relation :

$$P_{bossages} = \frac{C_{bossages} F}{D_{ext} A} \quad (3.4)$$

où  $C_{bossages}$  est un paramètre de recalage issu de l'expertise métier Renault. Une fonction d'état limite, notée  $G_{bossages}$ , établie à partir d'une règle de dimensionnement métier permet de distinguer les valeurs de charge dépassant la charge critique  $S_{bossages}$  de celles qui lui restent inférieures. Autrement dit, elle différencie les valeurs de charge qui entraînent un grippage de l'axe de piston ( $G_{bossages} \leq 0$ ) de celles pour lesquelles le grippage ne se produit pas ( $G_{bossages} > 0$ ). Dans ce cas, cette fonction d'état limite s'écrit aussi simplement :

$$G_{bossages} = S_{bossages} - P_{bossages} \quad (3.5)$$

où la charge critique  $S_{bossages}$  est une variable seuil déterminée par l'expérience métier Renault.

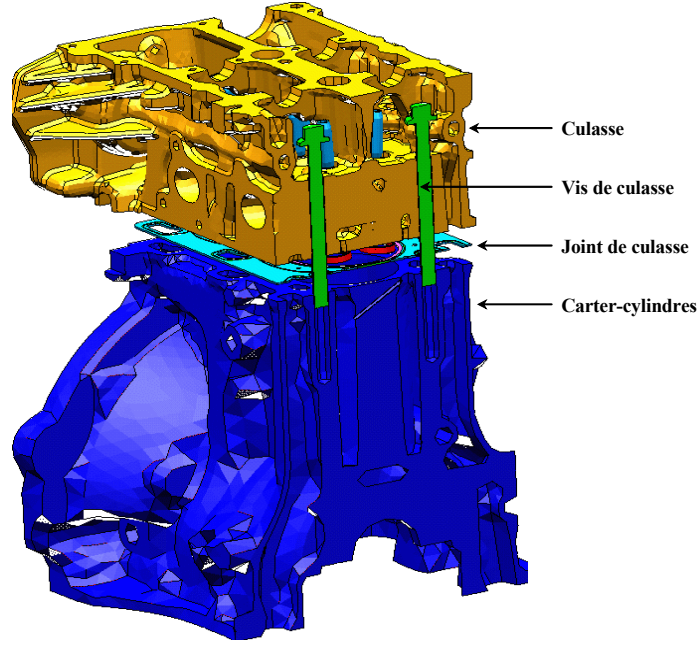


FIG. 3.7 – Assemblage Culasse / Joint de culasse / Carter-cylindres.

### Flexion de l'axe

La flèche de l'axe de piston due à la flexion générée par l'effort  $F$  est définie de manière analytique par la relation :

$$flèche_{axe} = \left[ 1 - \frac{B^2}{2a^2} - \frac{B^3}{3a^3} \right] \frac{Fa^3}{48E_{axe}I_b} \quad (3.6)$$

où  $I_b$  désigne l'inertie de l'axe déterminée en fonction de l'ovalisation  $\Delta d$  :

$$I_b = \frac{\pi}{64} (D_{ext}^4 - D_{int}^4) \times f(\Delta d) \quad (3.7)$$

Une fonction d'état limite, notée  $G_{flexion}$ , établie à partir d'une règle de dimensionnement permet de distinguer les valeurs de flèche entraînant un grippage de l'axe ( $G_{flexion} \leq 0$ ) de celles qui ne l'entraînent pas ( $G_{flexion} > 0$ ). Dans ce cas, cette fonction d'état limite s'écrit simplement :

$$G_{flexion} = S_{flèche} - flèche_{axe} \quad (3.8)$$

où le seuil critique  $S_{flèche}$  est une variable déterminée par l'expérience métier Renault.

### 3.2.5 Etanchéité aux gaz au niveau du joint de culasse

#### Eléments de modélisation

L'étanchéité statique aux gaz au niveau du joint de culasse est analysée par rapport au comportement thermomécanique de l'assemblage culasse / joint de culasse / carter-cylindres (figure 3.7) et à sa réponse en déformation aux sollicitations émanant de la

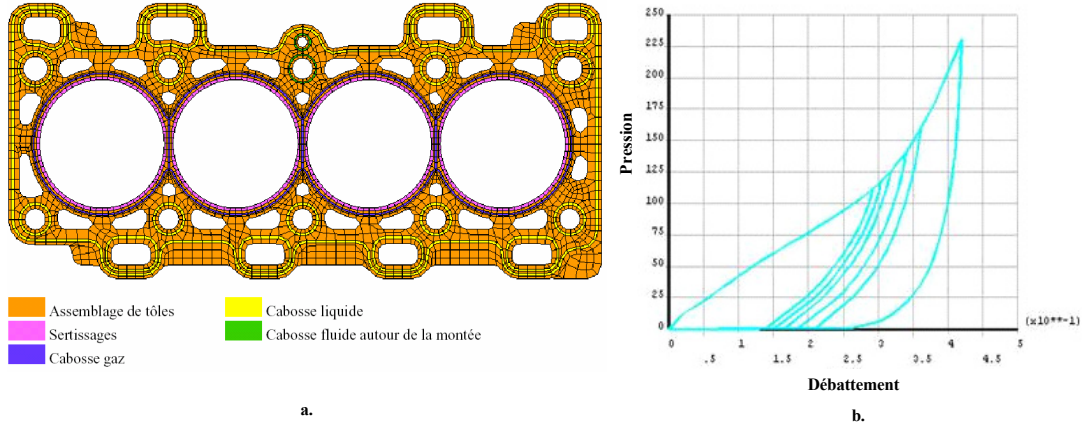


FIG. 3.8 – Eléments de modélisation d'un joint de culasse.

pression de combustion maximum  $P_{max}$ , de la température des gaz de combustion et du serrage des vis de culasse. En fait, le joint de culasse a pour fonction d'assurer l'étanchéité aux gaz, au liquide de refroidissement et à l'huile entre la culasse et le carter-cylindres. Nous nous intéressons ici qu'à la réalisation de l'étanchéité aux gaz pour laquelle le joint et l'assemblage de tôles qui le constitue exploitent deux barrières (figure 3.8 a.) :

- les sertissages qui ont pour fonction de répartir l'effort de serrage autour de la chambre de combustion (fûts du cylindre) ainsi que de rattraper les débattements de la culasse et du carter-cylindres. Ils protègent ainsi les vis et limitent l'écrasement des cabosses gaz.
- les cabosses gaz qui ont pour fonction de reprendre les mouvements dynamiques entre la culasse et le carter-cylindres.

Les caractéristiques thermomécaniques des matériaux des pièces de l'assemblage, leur géométrie et les sollicitations thermomécaniques qu'elles subissent, sont les paramètres élémentaires du calcul assurant l'évaluation du débattement du joint au niveau des fûts des cylindres et de la pression minimale s'exerçant sur les cabosses gaz du joint de culasse. Les caractéristiques thermomécaniques des matériaux des différentes pièces sont renseignées dans le tableau 3.5. La modélisation du comportement non-linéaire du joint nécessite la donnée supplémentaire du  $GAP$  de son sertissage  $GAP_{JdC}$  (qui correspond à la hauteur initiale du joint non serré moins la hauteur du sertissage) et de sa courbe de charge/décharge ou d'écrasement (courbes pression-débattement illustrées en figure 3.8 b.). En ce qui concerne le chargement thermique, les températures moyennes de l'air ambiant  $T_{air}$ , des gaz de combustion, des gaz d'échappement  $T_{gaz}$ , de l'huile  $T_{huile}$  et de liquide de refroidissement  $T_{eau}$  sont requises. En outre, des coefficients d'échange thermique, exprimés en  $mW.mm^{-2}.^{\circ}C^{-1}$ , sont spécifiés au niveau des zones interfaces entre l'air ambiant, les gaz de combustion, les gaz d'échappement, l'huile, le liquide de refroidissement et les différentes pièces de l'assemblage. Le chargement mécanique correspond quant à lui à la pression de combustion maximum  $P_{max}$  issue de la combustion et à la tension de pose  $F_{pose}$  des vis de culasse. Nous ne rappelons pas ici

Paramètre	Unité
Module d'Young Carter-cylindres (Fonte) Culasse (Alliage aluminium)	MPa
Raideur Carter-cylindres Culasse Vis	N.mm <sup>-1</sup>
Coefficient de dilatation Carter-cylindres Culasse Vis	°C <sup>-1</sup>
Conductivité thermique Carter-cylindres Culasse Joint de culasse	mW.mm <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup>
Conductance Joint de culasse (sertissage et cabosse) / Culasse Joint de culasse (corps) / Carter-cylindres Joint de culasse / Carter-cylindres	mW.mm <sup>-2</sup> .°C <sup>-1</sup>

TAB. 3.5 – Caractéristiques thermo-mécaniques pour la modélisation de l'assemblage.

l'ensemble des caractéristiques définissant la géométrie des pièces de l'assemblage.

### Les étapes du calcul d'étanchéité

Le calcul d'étanchéité aux gaz au niveau du joint de culasse peut être décomposé en deux grandes étapes : le calcul de la tension stabilisée  $F_{stab}$  des vis de culasse et le calcul thermomécanique de l'assemblage complet. Le calcul thermomécanique est lui-même scindé en trois sous-phases distinctes correspondant au serrage de l'assemblage et à l'application de la pression de combustion, au calcul thermique générant une carte de température et au calcul mécanique donnant accès aux débattements au niveau du sertissage et à la pression de contact au niveau des cabosses gaz.

La tension de pose stabilisée  $F_{stab}$  est obtenue à partir de la tension de pose initiale  $F_{pose}$  et d'un facteur de perte de tension  $\Delta F_{pose}$  :

$$F_{stab} = F_{pose} - \Delta F_{pose} \quad (3.9)$$

Ce facteur de perte de tension est estimé analytiquement de manière prévisionnelle à partir des raideurs respectives de la culasse  $K_{culasse}$ , du carter-cylindres  $K_{carter}$  et des vis  $K_{vis}$  ainsi que de l'allongement plastique des vis de culasse  $\Delta L_{plastique}$  :

$$\Delta L_{plastique} = \underbrace{\Delta L_{thermique}}_{\text{dû à la thermique}} + \underbrace{\Delta L_{combustion}}_{\text{dû à la pression de combustion}} \quad (3.10)$$



Si le calcul de la tension stabilisée à partir de la tension de pose demeure analytique, le calcul thermomécanique est réalisé au moyen de modèles éléments finis 3D plus ou moins complexes selon l'avancement de la conception.

### Définition des critères d'étanchéité

Une fonction d'état limite, notée  $G_{sertissage}$ , établie à partir d'une règle de dimensionnement permet de distinguer le caractère défaillant ( $G_{sertissage} \leq 0$ ) ou non ( $G_{sertissage} > 0$ ) des sertissages, première barrière d'étanchéité au gaz au niveau des fûts :

$$G_{sertissage} = S_{débattement} - (GAP_{JdC} - h_{écrasement\ mini}) \quad (3.11)$$

où :

- $S_{débattement}$  est un critère défini par l'expertise Renault représentant la valeur maximale du débattement admissible au niveau des sertissages du joint de culasse.
- $GAP_{JdC}$  représente la différence entre l'épaisseur totale du joint et l'épaisseur des sertissages (toutes les zones du joint n'ont pas la même l'épaisseur). Typiquement, les cabosses gaz sont plus épaisses que les sertissages qui sont eux-mêmes plus épais que le corps du joint. Le  $GAP_{JdC}$  peut ainsi être assimilé à l'écrasement nécessaire du joint pour qu'il assure l'étanchéité. Nous rappelons que c'est un paramètre intrinsèque au joint.
- $h_{écrasement\ mini}$  est le résultat du calcul thermomécanique qui mesure l'écrasement minimum du joint au niveau des sertissages.

L'inégalité  $GAP_{JdC} > h_{écrasement\ mini}$  signifie l'existence d'un chemin de fuite.

Une fonction d'état limite, notée  $G_{cabosse}$ , établie à partir d'une règle de dimensionnement, permet de distinguer le caractère défaillant ( $G_{cabosse} \leq 0$ ) ou non ( $G_{cabosse} > 0$ ) des cabosses gaz, deuxième barrière d'étanchéité au gaz :

$$G_{cabosse} = P_{cabosse}^{min} - P_{cabosse}^{admissible}(P_{max}) \quad (3.12)$$

où :

- $P_{cabosse}^{min}$  est le résultat du calcul thermomécanique qui mesure la pression minimum qui s'exerce sur les cabosses gaz du joint pour le point de fonctionnement moteur simulé.
- $P_{cabosse}^{admissible}(P_{max})$  est un critère de pression minimale à assurer au niveau de la cabosse gaz du joint. Il est défini par l'expertise Renault en fonction de la pression de combustion maximum attendue.

### 3.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a d'abord contribué au rappel des principes fondamentaux du fonctionnement d'un moteur Diesel d'automobile. Il a ensuite permis de donner une vue générale sur l'exemple qui va accompagner la présentation et la démonstration des points forts et originaux de l'approche mécano-probabiliste en conception pour la fiabilité que nous proposons. En effet, cet exemple conducteur est exploité à maintes

reprises au cours des chapitres suivants afin d'illustrer, soit en le considérant dans sa globalité soit en se focalisant sur un de ses aspects spécifiques pris isolément, l'ensemble des méthodes proposées ainsi que les outils qui s'y rattachent.

## Chapitre 4

# Limites des modélisations *système sans physique* et *physique sans système* en conception pour la fiabilité

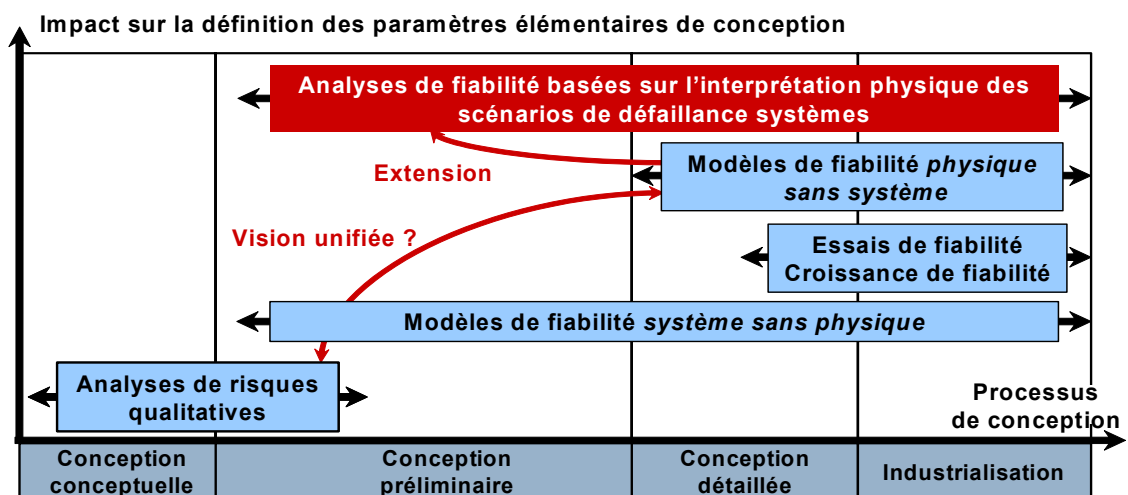


FIG. 4.1 – Processus de conception et analyses de fiabilité classiques.

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une synthèse critique de l'état de l'art des méthodes et des outils classiquement déployés dans le cadre d'analyses prévisionnelles de fiabilité de systèmes mécaniques.

Nous introduisons d'abord la notion et le concept de fiabilité prévisionnelle, en prenant le soin de bien la positionner par rapport aux autres composantes de la discipline de la Sûreté de Fonctionnement (SdF). Ensuite, nous rappelons les enjeux et les principes des méthodes usuelles de l'analyse prévisionnelle de fiabilité. Nous distinguons essentiellement les analyses exploitant une représentation *système sans physique* du problème de fiabilité de celles reposant sur son interprétation *physique sans système*. En exploitant une décomposition systématique classique d'un processus de conception, nous finissons d'en exhiber les principales limites. En particulier, comme l'illustre la figure 4.1, nous hiérarchisons ces différents moyens d'analyse de fiabilité en fonction :

- de leur moment d'utilisation au cours de la conception,
- des interactions qu'ils génèrent avec les métiers de la conception pour la définition des paramètres de conception et l'aide au dimensionnement.

Enfin, nous argumentons et nous justifions la nécessité de développer une approche d'élaboration et de validation de la fiabilité en conception basée, au plus tôt, sur la simulation numérique des scénarios de défaillance physiques des systèmes mécaniques. Il s'agit donc de proposer une démarche multidisciplinaire pour la conception fiable reposant sur des modèles intégrant à la fois la modélisation système de la physique de défaillance et la considération des incertitudes inhérentes à sa réalisation. Nous précisons, en dernier lieu, les fondements de l'approche de conception fiable pilotée par l'approche mécano-fiabiliste orientée système que nous proposons. Nous insistons sur les verrous scientifiques et techniques auxquels nous nous attaquons spécifiquement au cours des chapitres suivants.

## 4.2 Notion et concept de fiabilité prévisionnelle

Les soucis de fiabilité et de sécurité ont toujours été présents dans l'esprit de l'être humain, et ce quels que soient les époques et les milieux dans lesquels il a évolué. En fait, la fiabilité qualifie le caractère de ce en quoi on peut avoir confiance. L'état de sécurité désigne l'état dans lequel le risque d'exposition à des dommages corporels ou matériels est limité à un niveau acceptable. Dans ce contexte, le risque n'est autre que la rencontre d'un événement indésirable dont les conséquences sont importantes (un niveau de risque est nécessairement accepté, explicitement ou implicitement). Pendant de nombreux siècles, la maîtrise des risques et la fiabilité des créations de l'homme se sont construites exclusivement sur la base de l'apprentissage par la défaillance et par les catastrophes. Le début de l'ère industrielle, et les avancées technologiques continues qui l'ont accompagné, ont renforcé le caractère nécessaire et essentiel de la maîtrise des risques et de la maîtrise de la fiabilité des constructions industrielles.

Depuis, les concepts se sont à la fois multipliés et formalisés. Dans de nombreux domaines industriels, les méthodes et les mesures associées à la fiabilité se sont considérablement développées. Aux préoccupations de fiabilité et de sécurité sont venues

s'ajouter celles de disponibilité et de maintenabilité, donnant naissance à une véritable science de l'ingénieur : la sûreté de fonctionnement. Nous ne rappelons pas, ici, les faits marquants du développement de la fiabilité et de la sûreté de fonctionnement en tant que disciplines de l'ingénieur : ils sont très bien synthétisés dans les ouvrages de référence [Vil88, RH04].

Aujourd'hui, la conception de tout système industriel et technique nécessite le recours plus ou moins important aux concepts et aux méthodologies de la sûreté de fonctionnement. Leur but essentiel est de fournir des informations sur la base desquelles tout décideur peut construire ou orienter ses prises de décisions, depuis le stade de la lettre d'intention et de l'avant-projet jusqu'à la conception, la réalisation et l'exploitation du système. Ceci résulte également d'une pression de la société toujours plus grande pour des produits de plus en plus sûrs.

#### **4.2.1 Une définition technique et théorique de la fiabilité**

La définition technique et théorique standard de la fiabilité (reprise par l'Association Française de Normalisation - AFNOR NF X50 / 120, par l'*International Standard Organization - ISO 8402*, ou encore par les *British Standard BS 4778*) est la suivante :

Aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions opérationnelles et dans un environnement donné pour une durée de fonctionnement prédéfinie.

Le terme "dispositif" désigne tout composant, sous-système ou système pouvant être considéré comme une entité qui, prise séparément, pourrait faire l'objet d'études ou de tests dédiés. Nous distinguons plusieurs types de dispositifs : les systèmes techniques matériels, les systèmes logiciels et les opérateurs humains. Une "fonction requise" correspond à une fonction simple ou à une combinaison de fonctions dont l'accomplissement est nécessaire afin de fournir un service donné. Cette définition s'accompagne souvent d'un complément (*e.g. International Electrotechnical Commission - IEC 61703*) qui précise que le terme de fiabilité est aussi utilisé comme caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès.

En fait, tout dispositif est conçu pour remplir une ou plusieurs fonctions passives (*e.g. un carter d'huile de moteur d'automobile*) ou actives (*e.g. un injecteur de carburant pour rester dans le domaine automobile*). L'évaluation de leur fiabilité peut solliciter la mise en œuvre de méthodes et d'outils fondamentalement différents. Cependant, de manière générale, elle est effectivement caractérisée par une mesure de probabilité.

#### **4.2.2 Définitions pratiques et branches d'application**

Au-delà de cette définition technique au sens strict de la fiabilité, il existe dans la pratique une multitude d'interprétations [Vil88]. Le but, ici, n'est pas de les présenter de manière exhaustive. En revanche, nous en indiquons l'étendue.

D'abord, au sens commun, la notion de fiabilité correspond à la confiance que l'on a lors de l'utilisation d'un matériel quelconque ; elle est alors souvent utilisée comme

caractéristique désignant une probabilité de succès. Ensuite, au sens large, il n'est pas rare de voir le terme "fiabilité" rattaché à des activités diverses, mais en interaction :

- l'analyse de défaillance des systèmes et la sûreté de fonctionnement,
- la fiabilité prévisionnelle et les études de fiabilité dès les premières étapes de la conception,
- la fiabilité expérimentale et les essais de fiabilité,
- la fiabilité opérationnelle et la construction de banques de données de fiabilité,
- l'assurance de la fiabilité et la qualité.

Par conséquent, certains ont même été jusqu'à élever cette discipline au rang de "science des défaillances" [SP69].

Dans la suite de nos réflexions, nous nous intéressons essentiellement à la problématique de la fiabilité prévisionnelle. Sa définition, d'une part, et son positionnement dans le cadre de processus de conception industrielle de systèmes mécaniques, d'autre part, constituent les principaux objectifs de ce chapitre.

De manière toute aussi générale, nous pouvons distinguer trois branches d'application majeures de la fiabilité :

- la fiabilité du matériel, des systèmes techniques (*Hardware reliability*),
- la fiabilité du logiciel (*Software reliability*),
- les facteurs humains (*Human and organizational reliability*).

Même si, pour de nombreuses applications actuelles, les interactions entre les systèmes techniques, le logiciel et les utilisateurs participent de manière active à la construction de la fiabilité globale d'un "système homme-machine", les réflexions que nous menons dans le cadre de ces travaux de recherche concernent exclusivement le domaine de la fiabilité du matériel, des composants et des systèmes mécaniques. Pour ce qui est des approches de fiabilité au niveau du logiciel, nous orientons le lecteur vers la consultation d'ouvrages généraux qui leur sont consacrés (*e.g.* [LAB<sup>+</sup>95, Pel01]). Quant aux analyses de fiabilité destinées à la prise en compte des facteurs humains et organisationnels, nous recommandons les introductions fournies dans [Vil88, ONB02] ainsi que les descriptions plus détaillées proposées dans [Rea90, SG83, Kir94]. Dans la suite, nous abordons donc de manière plus spécifique la problématique et les enjeux des analyses prévisionnelles de fiabilité des systèmes mécaniques.

#### 4.2.3 Fiabilité prévisionnelle, expérimentale et opérationnelle

En fait, la fiabilité n'est pas une caractéristique que l'on peut ajouter à un dispositif après qu'il a été conçu, fabriqué et contrôlé. Autrement dit, soit elle se construit, soit elle s'observe. Si dans le second cas de figure l'observation impose un caractère à dominante passive, en revanche, dans le premier cas de figure, des actions visant à élaborer et à démontrer la fiabilité interviennent tout au long du processus de développement d'un équipement, quel que soit son degré d'innovation. Nous distinguons, ainsi, les phases de conception (prévision de la fiabilité), de fabrication (contrôle de la fiabilité) et d'exploitation (fiabilité opérationnelle).

La fiabilité prévisionnelle consiste à évaluer une fiabilité ou à démontrer un niveau de fiabilité futur à partir de considérations et d'actions entreprises au moment des phases de conception d'un système technique et de ses composants. Elle vise à :

- s'assurer que les clauses de fiabilité sont respectées,

- répartir les objectifs de fiabilité du système au niveau de ses divers constituants de façon à optimiser sa conception,
- définir un système bien adapté au besoin auquel il doit répondre, sur la base de critères suffisamment précis et objectifs.

La fiabilité expérimentale complète les analyses prévisionnelles de fiabilité, principalement en amont et au moment de la phase de fabrication du système. Elle exploite des données issues d'essais, éventuellement accélérés ou sévérés. Ceux-ci sont destinés à valider la fiabilité, tout en complétant les données de fiabilité existantes et les considérations prévisionnelles précédentes. Les hypothèses sur lesquelles reposent les études de fiabilité prévisionnelles et expérimentales ne permettent pas, en général, de reproduire exactement les conditions réelles de fonctionnement du système. Elles ne fournissent ainsi que des estimations de la fiabilité, plus ou moins biaisées, qu'il est important de contrôler.

La fiabilité opérationnelle résulte, quant à elle, de l'observation et de l'analyse du comportement des systèmes dans des conditions réelles de fonctionnement. Si l'écart entre fiabilité estimée et fiabilité observée est trop important, il convient de prendre les mesures nécessaires pour repositionner le produit par rapport à son objectif de fiabilité. Toute modification est d'autant plus coûteuse qu'elle intervient à une étape plus éloignée de la conception.

Cette discussion renforce l'enjeu crucial d'une démarche de fiabilité prévisionnelle qui est la seule, à notre sens, à pouvoir participer efficacement à l'élaboration de la fiabilité effective d'un système.

#### **4.2.4 Analyses de défaillance et fiabilité prévisionnelle**

La problématique de la fiabilité prévisionnelle relève, avant tout, de l'étude des processus de défaillance des systèmes et de la définition des moyens palliatifs éventuellement nécessaires ; et ce, dès les premières phases de leur développement et de leur conception. Le rôle de l'analyse de défaillance est multiple et se décline sur plusieurs niveaux. D'abord, elle est censée identifier l'ensemble des défaillances potentielles d'un système. Par défaillance, on entend toute altération ou cession de l'aptitude d'un dispositif à accomplir sa ou ses fonctions avec les performances définies dans le cahier des charges du dispositif. On est généralement amené à distinguer les défaillances soudaines, des défaillances progressives, partielles, complètes, par dégradation ou encore par dérive [Cor75]. Ensuite, elle doit permettre de recenser tous les scénarios conduisant, d'une manière ou d'une autre, à l'occurrence de ces défaillances. Finalement, sur la base d'une étude exhaustive, le rôle de l'analyse de fiabilité prévisionnelle consiste à développer un modèle visant à évaluer ou à construire la fiabilité du système, en prenant en compte son architecture, les caractéristiques relatives à ses divers composants, et tous les phénomènes ou paramètres potentiellement impliqués au cours des différents scénarios identifiés.

Un processus classique d'analyse de fiabilité prévisionnelle est itératif (Fig. 4.2). D'abord, il ne peut s'enclencher raisonnablement sans l'existence d'un certain nombre de prérequis. Parmi les plus importants, on souligne la définition du système et de son environnement dans leur globalité et une première prise d'information générale sur le cahier des charges fonctionnel du système et sur les critères de fiabilité qu'il doit

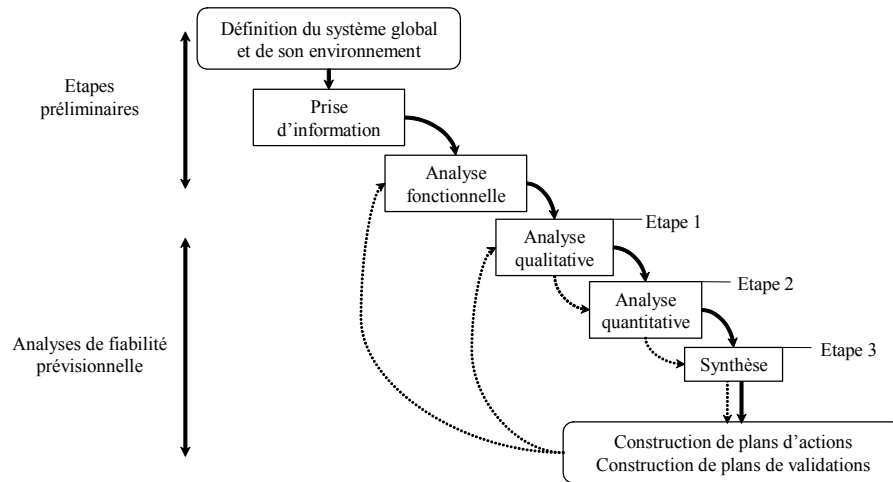


FIG. 4.2 – Processus itératif d'une analyse de fiabilité prévisionnelle.

respecter. Les objectifs de l'analyse de fiabilité doivent être énoncés afin d'orienter très tôt le déploiement des étapes spécifiques de son processus.

L'analyse fonctionnelle assure ensuite le recueil d'informations plus fines sur le système à concevoir, en apportant des précisions sur ses fonctions et sur celles de ses différents composants, en renseignant sur ses interactions avec son environnement.

Les analyses qualitatives et quantitatives mettent ensuite en évidence les points forts et surtout les points faibles de la conception d'un système. Leur synthèse doit mettre en avant les défaillances, les combinaisons de défaillances, les séquences événementielles ou phénoménologiques les plus critiques au regard de la fiabilité du système.

Finalement, la définition de plans d'actions, leur réalisation et la construction de plans de validations doivent constituer la réponse effective par rapport à l'ensemble des points faibles du système. Ils doivent assurer que tout est fait pour amener le système à un niveau satisfaisant de fiabilité. Généralement les actions possibles et envisageables sont, par exemple :

- la vérification et la validation de la fiabilité de certains composants par la réalisation de tests physiques (ce qui relève alors plus du domaine de la fiabilité expérimentale) ou de simulations numériques,
- l'amélioration de la fiabilité intrinsèque des composants par une modification de conception,
- l'amélioration de la fiabilité par un changement radical d'un ou de plusieurs composants,
- l'ajout de protections ou de systèmes de contrôle,
- la planification d'actions de maintenance préventive sur certains composants du système,
- l'optimisation de l'allocation des objectifs de fiabilité du système au niveau de ses composants et de leur paramètre de dimensionnement.

Une fois que des actions correctives et modificatives ont été réalisées, il est nécessaire de reprendre le processus d'analyse prévisionnelle au niveau des étapes d'analyse fonc-



tionnelle ou d'analyse qualitative de fiabilité. Tant que le niveau de fiabilité requis n'est pas obtenu, on poursuit la progression de l'analyse à travers le schéma itératif illustré dans la figure 4.2.

### 4.3 Analyses de fiabilité qualitatives

Les démarches qualitatives de fiabilité prévisionnelle ont pour objectif la recherche de toutes les causes pouvant affecter la fiabilité du système, et/ou de tous les effets engendrés par l'une de ses défaillances potentielles. Nous en distinguons plusieurs types au sein desquels s'organisent différentes méthodes d'analyse. En particulier, les démarches inductives s'opposent aux démarches déductives. Dans le premier cas, on s'intéresse de plus près aux effets et aux conséquences qu'une défaillance donnée peut avoir sur le système lui-même et sur son environnement. Par exemple, il s'agit d'identifier l'impact d'une rupture de bielle de moteur d'automobile sur le moteur lui-même et les effets ressentis par le conducteur. Dans le second cas de figure, on raisonne dans l'autre sens, en partant du général, pour aller progressivement vers le particulier. Il s'agit donc de rechercher les causes d'un événement ou d'une défaillance. On va alors plutôt chercher à identifier ce qui est à l'origine de la rupture de la bielle. Les méthodes d'analyse déployées dans ces démarches sont aussi nombreuses que différentes.

Le rôle de l'analyste fiabiliste consiste d'abord à choisir les méthodes les plus adaptées au type de problème abordé, aux objectifs qui lui sont fixés et aux moyens dont il dispose. Ensuite, il doit faire en sorte que l'exploitation de ces méthodes aboutisse à la réalisation d'un modèle de fiabilité du système et des défaillances qui l'affectent. Ce modèle de fiabilité dépend fortement :

- de l'architecture du système et de la décomposition qui en est faite,
- des hypothèses réalisées pour la caractérisation des états et des configurations *a priori* importantes du système,
- des hypothèses réalisées sur les effets des diverses défaillances (perte de performance, ou défaillance binaire de type marche ou ne marche pas),
- des hypothèses émises sur les phénomènes physiques en jeu et engendrés par les défauts du système.

Les outils classiques de l'analyse qualitative sont : les analyses préliminaires des risques (APR), les analyses des modes de défaillance de leurs effets et de leur criticité (AMDEC), les méthodes d'arbre des causes et d'arbre des conséquences. Une description de leurs principes et de leurs enjeux, dans le contexte spécifique de notre démarche, est proposée dans le chapitre 5.

La modélisation qualitative constitue, avec l'analyse fonctionnelle, les "piliers de la sagesse" de l'analyse prévisionnelle globale [Lig98]. Sa réalisation doit donc faire l'objet d'efforts particuliers et ne doit en aucun cas être négligée. Elle conditionne en grande partie la suite de l'analyse de fiabilité et son interprétation quantitative. Cette dernière repose, de manière alternative, sur une modélisation *système sans physique* ou *physiques sans système* du problème de fiabilité que nous précisons et dont nous justifions la terminologie ci-après.

## 4.4 Interprétations quantitatives *systèmes sans physique*

### 4.4.1 Modèles de fiabilité sans physique des composants d'un système

L'approche quantitative communément admise de la fiabilité de dispositifs consiste à la représenter au moyen de distributions probabilistes classiques. Plus précisément, il s'agit de décrire la distribution  $F(t)$  de leur durée de vie  $T$ <sup>1</sup> en leur associant des lois de probabilité plus ou moins classiques, et d'estimer leurs paramètres sur la base de données de fiabilité, de données du retour d'expérience.

Les lois généralement utilisées ainsi que leurs critères de sélection, relativement aux dispositifs dont la fiabilité est modélisée, sont répertoriés dans de nombreuses références (*e.g.* [Mor66, KGC75, MKK99]). Leur choix dépend du type de problèmes et de défaillances traités. Par exemple, lorsqu'on fait l'hypothèse d'un taux de défaillance  $h(t)$  constant, la durée de vie est modélisée par une loi de distribution exponentielle. En revanche, dans le cas de l'analyse de composants mécaniques pour lesquels les taux de défaillance  $h(t)$  ne sont généralement pas constants, on préfère souvent une représentation par distribution de Weibull. D'autres lois plus spécifiques sont parfois nécessaires pour la modélisation de composants ou de systèmes soumis à des phénomènes particuliers. Les distributions de Birnbaum-Saunders [BS69] et Gaussienne inverse [BF82] sont ainsi bien adaptées à la modélisation des durées de vie d'équipements soumis à des phénomènes de fatigue. Dans ces conditions, la connaissance de la distribution de la durée de vie  $F(t)$  d'un système assure la caractérisation immédiate de sa fonction de fiabilité  $R(t)$ . Un traitement mathématique adapté permet alors d'en déduire d'autres mesures de fiabilité telles que des taux de défaillance globaux  $\lambda(t)$ , des probabilités de bon fonctionnement à un temps donné  $A(t)$ , des temps moyens à la défaillance (*Mean Time To Failure MTTF*).

La principale difficulté de cette démarche implicite relève de la détermination d'une distribution de durée de vie représentative et de ses paramètres, pour un composant donné, évoluant dans des conditions et dans un environnement spécifiques. Le choix de cette distribution et l'estimation de ses paramètres sont classiquement guidés par le retour d'expérience, les résultats d'essais de caractérisation ou encore l'analyse des jugements d'experts. Lorsque le niveau de connaissance est faible, voire inexistant, une solution envisageable pour leur caractérisation est le recours aux méthodes Bayésiennes [RH04, LP01]. Elles permettent, en effet, de fusionner l'ensemble des données issues des sources précédemment citées et donc d'enrichir la définition des paramètres des lois de distribution dès lors que toute nouvelle information est disponible.

Ce type d'approche assure l'estimation de mesures de fiabilité d'éléments sans pour autant en détailler la physique ou les causes de défaillance. Les éléments et les systèmes sont considérés comme des "boîtes noires", dont on peut seulement observer s'ils fonctionnent ou non, et dont les durées de vie sont modélisées par des distributions probabilistes. L'ensemble des informations concernant la conception et les multiples paramètres physiques qui la caractérisent (*i.e.* les paramètres dimensionnant le système, les contraintes de fonctionnement, les sollicitations extérieures,...) sont combinés et pris en compte de manière implicite au travers de la définition de la distribution

<sup>1</sup>L'ensemble des quantités et des mesures de fiabilité auquel nous faisons ici référence est défini de manière théorique dans l'annexe B.

probabiliste du temps à la défaillance  $T$ . Ces méthodes ne permettent donc ni d'identifier les séquences phénoménologiques critiques au regard des modes de défaillance, ni d'identifier le poids des paramètres de conception dans les différents scénarios de défaillance. C'est pourquoi nous qualifions ces représentations de modèles de fiabilité de type *composant sans physique*. Malgré ces inconvénients, l'intérêt majeur de cette méthode réside dans la définition des fonctions de fiabilité des composants élémentaires d'un système à partir desquelles on cherche, par la suite, à estimer la fiabilité du système... à condition de disposer d'un modèle système plus global établissant les liens entre ses divers constituants.

#### 4.4.2 Des composants sans physique aux systèmes sans physique

Dans le cadre des méthodes d'évaluation prévisionnelle de la fiabilité, les systèmes sont souvent considérés comme un assemblage d'éléments dont les actions et les interactions déterminent le comportement de l'ensemble. La connaissance de la fiabilité intrinsèque des éléments, la formalisation de l'architecture des systèmes et l'identification de leurs différents états possibles, constituent la base de l'estimation de leur fiabilité prévisionnelle au moyen de représentations que nous qualifions de modèles *systèmes sans physique*.

Les méthodes de calcul, qui leurs sont associées, relèvent de techniques mathématiques permettant de traiter les aspects logiques de l'occurrence des défaillances soudaines, complètes, réversibles ou irréversibles observées au niveau des différents composants des systèmes. Selon les caractéristiques propres aux systèmes étudiés, principalement leur structure (redondances actives, passives,...) et les hypothèses émises sur le comportement de leurs éléments constitutifs (nombre et type d'états défaillants, dépendance des défaillances), nous distinguons deux grandes manières d'aborder le problème de l'évaluation de leur fiabilité :

- par formulations statiques directes ou par fonctions de structure, voire par coupes minimales,
- par formulations reposant sur la définition de l'espace des états et la manipulation de processus stochastiques.

#### Interprétation statique

**Formulation directe.** La formulation directe de la fiabilité est possible, sous certaines hypothèses, dans le cas des systèmes à configurations série, parallèle, mixte, à  $k$  éléments parmi  $n$ , à votes majoritaires, à éléments à plusieurs états ou encore pour des systèmes constitués d'éléments dépendants à taux de défaillance variables [Cor75]. La figure 4.3 illustre quelques unes des configurations simples de systèmes permettant la formulation directe de leur fiabilité. A titre d'exemple, nous fournissons l'expression de la fiabilité de systèmes simples à configurations série, parallèle, mixte et à  $k$  éléments parmi  $n$ .

La fiabilité  $R_s(t)$  d'un système de type série (Fig. 4.3 a.), composé d'éléments à

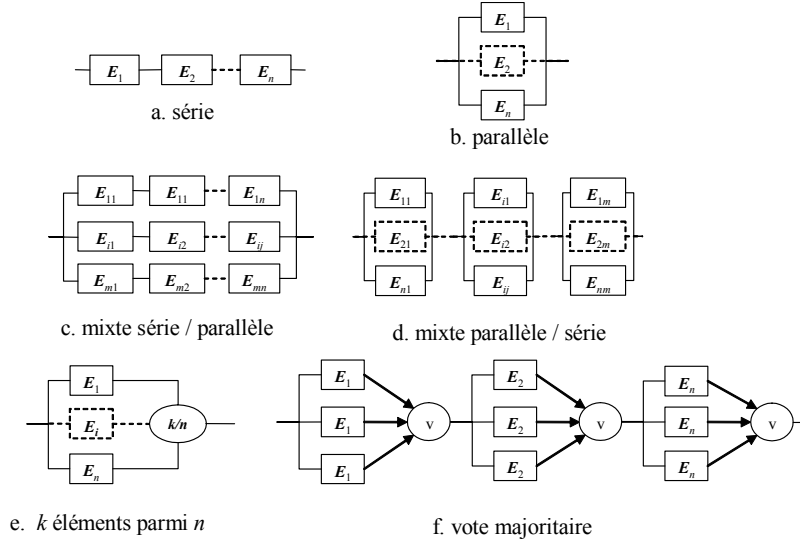


FIG. 4.3 – Architectures de systèmes acceptant une formulation directe de la fiabilité.

deux états “défaillant” ou “non défaillant”, s’exprime par la relation :

$$R_s(t) = \Pr(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \quad (4.1)$$

$$= \Pr(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \Pr(E_{n-1} | E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}) \dots \Pr(E_2 | E_1) \Pr(E_1) \quad (4.2)$$

où  $\Pr(E_i)$  est la probabilité de bon fonctionnement de l’élément  $E_i$  au temps  $t$ ,  $\Pr(E_i) = R_{E_i}(t)$ , et  $\Pr(E_i | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1})$  est la probabilité conditionnelle de bon fonctionnement de l’élément  $E_i$  sachant  $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{i-1}$ . Lorsque les éléments sont indépendants, il vient :

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n \Pr(E_i) = \prod_{i=1}^n R_{E_i}(t) \quad (4.3)$$

Un système est dit “série” si la défaillance d’un seul élément entraîne la défaillance du système.

La fiabilité  $R_s(t)$  d’un système de type parallèle (Fig. 4.3 b.), composé d’éléments à deux états “défaillant” ou “non défaillant”, s’exprime par la relation :

$$R_s(t) = \Pr(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1 - \Pr(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \dots \cap \overline{E_n}) \quad (4.4)$$

$$= 1 - \Pr(\overline{E_n} | \overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}}) \Pr(\overline{E_{n-1}} | \overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-2}}) \dots \Pr(\overline{E_2} | \overline{E_1}) \Pr(\overline{E_1}) \quad (4.5)$$

où  $\Pr(\overline{E_i})$  est la probabilité de défaillance de l’élément  $E_i$  au temps  $t$ ,  $\Pr(\overline{E_i}) = 1 - R_{E_i}(t)$ . Lorsque les éléments sont indépendants, il vient :

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n \Pr(\overline{E_i}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_{E_i}(t)) \quad (4.6)$$

Le système fonctionne lorsque l'un, au moins, des éléments placés en parallèle fonctionne.

Pour des systèmes à configuration mixte (Fig. 4.3 c. et d.), composés d'éléments à deux états "défaillant" ou "non défaillant", une formulation directe de la fiabilité donne :

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{j=1}^m R_{E_{ij}}(t) \right] \text{ dans le cas série/parallèle} \quad (4.7)$$

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{j=1}^m (1 - R_{E_{ij}}(t)) \right] \text{ dans le cas parallèle/série} \quad (4.8)$$

Dans certains systèmes à configuration parallèle, il est nécessaire que  $k$  éléments parmi les  $n$  placés en parallèle soient non défaillants pour que le système fonctionne (Fig. 4.3 e.). Lorsque les éléments sont indépendants et identiques la fiabilité du système s'écrit simplement à partir de la fonction de répartition d'une loi binomiale :

$$R_s(t) = \sum_{r=k}^n C_n^r R_E(t)^r (1 - R_E(t))^{n-r} \quad (4.9)$$

Les résultats obtenus par formulation directe concernant, les systèmes à éléments majoritaires, les systèmes à éléments à plusieurs états et les systèmes à éléments dépendants et à taux de défaillance variables, ne sont pas rappelés ici. Ils sont présentés en détail dans [Cor75], par exemple.

La formulation directe de la fiabilité n'est aisée que lorsque les systèmes sont à structure simple. Bien que le recours à une telle approche puisse s'avérer utile, son application reste limitée à un certain nombre de cas particuliers et ne permet pas la résolution de problèmes de fiabilité plus généraux relatifs à l'étude de systèmes complexes. Les représentations topologiques appropriées à une telle formulation sont essentiellement matérialisées par des blocs diagrammes de fiabilité (ou diagrammes de succès), des schémas-blocs logiques, ou par des formalismes équivalents de types arbres logiques ou arbres de défaillance simplifiés. L'utilisation de la représentation par diagrammes d'états peut parfois constituer une alternative judicieuse pour la résolution de systèmes un peu plus complexes.

**Formulation par fonction de structure ou coupes minimales.** La formulation d'un problème de fiabilité par fonction de structure ou par chemins minimaux et coupes minimales permet aussi l'étude statique de systèmes à topologie complexe, composés d'un grand nombre d'éléments. Son origine remonte aux premières tentatives de formalisation mathématique de la fiabilité des systèmes [BP65].

Dans le cas d'une formulation par fonction de structure classique, on considère que les systèmes ne peuvent connaître que deux états de performance : soit ils sont dans une configuration de bon fonctionnement, soit ils sont défaillants. De manière similaire, les  $n$  éléments constituant le système admettent les deux mêmes états de performance et les durées de vie  $T_i, i = 1, \dots, n$  de chacun des composants du système sont supposées aléatoires et indépendantes les unes des autres. Sous ces hypothèses, l'état d'un composant  $i$  peut alors être décrit par une variable binaire  $X_i(t)$  telle que :

$$X_i(t) = 1 \text{ s'il est opérationnel} \quad (4.10)$$

$$X_i(t) = 0 \text{ s'il est en panne} \quad (4.11)$$

En faisant l'hypothèse supplémentaire que l'état du système ne dépend que de l'état de l'ensemble de ses composants, la performance du système peut, à son tour être décrite par une fonction binaire  $\phi$  du vecteur d'état aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  telle que :

$$\phi(\mathbf{X}) = 1 \text{ s'il fonctionne} \quad (4.12)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = 0 \text{ s'il est défaillant} \quad (4.13)$$

Cette fonction  $\phi$  n'est autre que la fonction de structure du système. En reprenant les exemples de systèmes illustrés par la figure 4.3 a., b. et e., il vient respectivement les fonctions de structure suivantes :

$$\phi(\mathbf{X}) = X_1 X_2 \dots X_n = \prod_{i=1}^n X_i \quad (4.14)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = 1 - (1 - X_1)(1 - X_2)(1 - X_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i) \quad (4.15)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_1 X_3 - 2X_1 X_2 X_3 \text{ pour } k = 2 \text{ et } n = 3 \quad (4.16)$$

L'un des intérêts d'une telle fonction de structure est qu'elle peut être traduite de manière simple sous la forme d'une fonction de fiabilité. En effet, si nous associons la probabilité  $p_i$  à chaque événement  $X_i(t) = 1$ , on montre de manière quasi-immédiate (*e.g.* [Vil88]), lorsque les défaillances des composants des systèmes sont indépendantes, que la fiabilité du système  $R_s(t)$  s'obtient simplement en remplaçant les  $x_i$  par les  $p_i$  associées dans la fonction de structure du système :

$$R_s(t) = \Pr(\phi(\mathbf{x}(t)) = 1) = \phi(\mathbf{p}) \quad (4.17)$$

Nous nous limitons, ici, à la définition de la fonction de structure d'un système à deux états, constitué d'éléments à deux états. Toutefois, cette représentation binaire restrictive de la formulation par fonction de structure peut être étendue au cas de composants à plus de deux états [Cor75, Bon95].

La détermination de la fonction de structure d'un système complexe, dans un cadre plus général, n'est pas une tâche aisée. Il est ainsi préférable de conduire une analyse préliminaire permettant de définir ses chemins minimaux ou ses coupes minimales. Un chemin minimal représente un ensemble non redondant d'éléments dont le fonctionnement assure le fonctionnement du système. Une coupe minimale représente un ensemble non redondant d'éléments dont la défaillance entraîne celle du système. La connaissance des chemins minimaux ou des coupes minimales permet d'explicitier de manière plus simple la fonction de structure d'un système complexe. Elle est exploitée pour le traitement de la topologie des systèmes complexes à grand nombre de composants dont la fiabilité est évaluée à partir d'une formulation par fonction de structure [RH04].

Parmi les représentations topologiques tirant avantage d'un traitement soit par fonction de structure soit par chemins minimaux ou coupes minimales, on compte essentiellement les diagrammes blocs de fiabilité (diagrammes de succès) [Vil88] et les arbres de défaillance [VGND81]. L'avantage de l'approche structurale de la fiabilité par diagrammes blocs de fiabilité et par arbres de défaillance réside, d'abord, dans le formalisme logique de représentation de la fiabilité des systèmes et dans la simplicité de son évaluation à partir de la connaissance de la fiabilité de ses composants et de leurs interactions. Ensuite, elle permet généralement l'identification de l'influence de l'ensemble des composants sur la fiabilité du système par le biais de l'estimation de mesures d'importance (*e.g.* mesure de Birnbaum, mesure de Fussel-Vesely [MKK99]). Enfin, elle assure parfois la mise en œuvre d'un certain nombre de procédures visant à optimiser l'allocation de l'objectif de fiabilité du système au niveau de ses multiples composants [Ele00].

**Synthèse.** Les inconvénients majeurs de ce type de formulation, directe ou par fonction de structure et identification des coupes minimales, relèvent :

1. du caractère essentiellement statique des modèles de fiabilité qui en résultent. De manière générale, ils ne permettent ni la prise en compte du caractère évolutif dans le temps des systèmes, ni l'analyse de systèmes réparables. Dans des conditions très restrictives (indépendance des défaillances et des réparations intervenant dans la vie des composants du système), les diagrammes de succès peuvent aussi être utilisés pour l'évaluation de la fiabilité de système dont les composants sont réparables. Toutefois, les techniques déployées nécessitent, plus ou moins indirectement, le recours à des méthodes basées sur des formulations par l'espace des états (explicitée ci-après et conceptuellement différentes des formulations par fonction de structure). Les arbres de défaillance, quant à eux, sont utilisés comme outil principal dans de nombreuses études de sûreté de fonctionnement. Si la méthode de base consiste à exploiter leur formalisme au moyen d'un traitement par coupes minimales et d'une formulation par fonction de structure, ils ont fait l'objet aujourd'hui de nombreuses extensions. La référence [Lim05] leur est entièrement consacrée, elle en présente les principales. Celles-ci concernent les arbres de défaillance non cohérents, à délai, ou encore multi-performants. Sont également introduits les algorithmes de traitement classiques ainsi que les plus récents de type récursifs ou basés sur les diagrammes de décision binaire ou *BDD* [DRS99, DR01]. Des travaux ont également été réalisés afin de prendre en compte les séquences dépendantes d'événements : dans le cadre du développement des méthodes d'arbres de défaillance dynamiques, par exemple, des portes dynamiques sont introduites et un traitement par conversion de l'arbre en un modèle à états Markovien équivalent [DBB92] ou par simulations de Monte Carlo est effectué [MDCS98, DSC00].
2. de leur faible capacité à assurer le traitement de systèmes dont les défaillances des divers composants sont dépendantes les unes des autres. A cet effet, des méthodes spécifiques à l'étude des défaillances de causes communes et des composants dépendants ont été proposées (*e.g.* [Fle75, Atw83, Mos91]).
3. de leur inaptitude à identifier les phénomènes physiques les plus critiques vis-à-vis

des défaillances examinées, à caractériser les paramètres de conception dimensionnant les différentes entités du système vis-à-vis de ces mêmes défaillances.

### Formulation dynamique

Nous venons de voir que les méthodes et les outils développés dans le cadre des interprétations quantitatives structurelles permettent l'évaluation de la fiabilité de systèmes essentiellement statiques, non réparables et dont les défaillances des composants sont indépendantes. Le cas des systèmes dont les états et la configuration fluctuent dans le temps en fonction des défaillances ou des réparations de leurs composants est plus complexe. Il impose la caractérisation de mesures qui leur sont propres telles que la disponibilité  $A(t)$ , le temps moyen à la première défaillance  $MTTF$ , le temps moyen entre deux défaillances  $MTBF$ , etc (ces grandeurs sont définies en annexe B). Afin de modéliser le comportement spécifique de ces systèmes, des méthodologies et des outils permettant de décrire l'évolution de leur état à partir de processus aléatoires ont été développés dès les premières tentatives de formalisation mathématique de la fiabilité [GBS72]. Une description générale, plus récente, de l'utilisation des processus stochastiques pour la résolution de problèmes de fiabilité est donnée dans [CT97]. Nous nous contentons, ici d'introduire les fondements d'une telle interprétation quantitative de la fiabilité ainsi que les grands principes de la formulation par l'espace des états qui en émanent.

**Approche par processus de dénombrement.** La première approche consiste à considérer un système réparable pour lequel les temps de réparation sont supposés négligeables devant les temps observés entre deux défaillances. Après chacune de ses défaillances notées  $S_1, S_2, \dots$ , on fait l'hypothèse que le système est immédiatement réparé et en état de fonctionnement. Son comportement peut alors être modélisé par une fonction traduisant le nombre de défaillances  $N(t)$  qu'il connaît sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ .  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de dénombrement. Parmi les principaux processus de dénombrement utilisés dans le cadre d'études de fiabilité de systèmes réparables, on compte les processus de Poisson homogènes, les processus de renouvellement, les processus de Poisson non homogènes et les processus de réparation imparfaits [Lee95]. La finalité d'une telle modélisation par processus de dénombrement est l'estimation plus ou moins directe des mesures de fiabilité énoncées dans le paragraphe précédent. L'inconvénient majeur de cette représentation demeure que les systèmes réparables sont considérés comme des "boîtes noires" dont on peut seulement observer s'ils fonctionnent ou non.

**Approche par processus Markovien.** La seconde approche par processus stochastiques consiste à étudier les divers états d'un système réparable en fonction de l'évolution de la performance et de l'état de ses multiples constituants. Elle repose sur une formulation par l'espace des états qui définit l'ensemble des configurations possibles du système. L'évolution de l'état d'un système, en fonction des caractéristiques de fiabilité de ses composants et de l'occurrence d'événements les concernant, est alors décrite par un processus stochastique Markovien ou semi-Markovien (sans mémoire)  $\{X(t), t \geq 0\}$  [RH04]. Généralement, l'objet d'un tel formalisme est de déterminer la



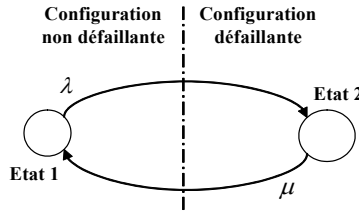


FIG. 4.4 – Graphe d'états d'un système élémentaire à un composant à deux états.

probabilité que le système soit dans un état spécifique à une date  $t$  donnée ainsi que les durées moyennes qu'il passe dans les différentes configurations possibles.

La première étape consiste à recenser l'ensemble des états potentiels et à les classer en états de fonctionnement (bon ou dégradé) ou défaillants, au niveau des composants puis au niveau des systèmes. Il s'agit, dans un deuxième temps, de recenser l'ensemble des transitions potentielles amenant le système d'un état à un autre et d'identifier les causes qui en sont à l'origine. Ces deux premières étapes correspondent à l'analyse qualitative indispensable et se matérialisent généralement sous la forme d'un graphe d'états. La figure 4.4 illustre le graphe d'états d'un système à un composant ayant deux états : fonctionnement (état 1) ou panne (état 2). Chaque sommet représente un état du système et chaque arc symbolise une transition entre deux états. Un arc est associé à un taux de transition (*i.e.* la probabilité de passage d'un état à un autre à un instant  $t$  donné). Dans le cas du système à un composant,  $\lambda$  caractérise une transition due à la défaillance de l'élément alors que  $\mu$  caractérise l'évolution due à sa réparation. La troisième étape de l'approche concerne le calcul de la probabilité de se trouver dans les différents états au cours d'une période prédéfinie de fonctionnement du système. Autrement dit, elle correspond à l'évaluation des caractéristiques de fiabilité du système ( $MTTF$ , temps moyen entre deux défaillances - *Mean Time Between Failure MTBF*,...). L'objet de la discussion n'est pas de rentrer dans le détail des techniques mathématiques permettant l'évaluation de la fiabilité à partir de tels modèles ; nous renvoyons donc le lecteur aux excellentes descriptions fournies dans [RH04, CT97].

Nous ajoutons simplement que les diagrammes d'états ne constituent pas la seule option possible pour la représentation topologique des systèmes dont les états évoluent au cours de leur fonctionnement relativement aux déclenchements de transitions pilotées par l'occurrence d'événements divers. Par exemple, une autre technique largement utilisée dans le cadre d'études de sûreté de fonctionnement est celle des réseaux de Petri. Ces réseaux ont été introduits par C. A. Petri afin de pouvoir représenter des systèmes composés de différentes entités évoluant en parallèle [Pet62]. Ils constituent une représentation mathématique formelle et graphique de systèmes discrets distribués<sup>2</sup>. Ils généralisent la théorie des automates (machines à états) en permettant l'expression de la simultanéité d'événements discrets. La modélisation d'un système sous forme de réseau de Petri a pour objectif majeur d'établir une correspondance entre ses multiples états et le marquage du réseau de Petri, celui-ci traduisant di-

<sup>2</sup>Un système distribué n'est autre qu'un système constitué de composants distincts en interactions conçus pour opérer séparément mais simultanément à partir des mêmes ressources.

rectement l'évolution dynamique du système. Les changements d'états (évolutions du marquage) sont pilotés par le franchissement de transitions soumis à un certain nombre de règles ou de conditions. Les développements des réseaux de Petri sont nombreux et ont fait l'objet de multiples publications<sup>3</sup>. Les réseaux de Petri exploités dans le cadre d'analyses de fiabilité et de sûreté de fonctionnement sont généralement des réseaux de Petri stochastiques généralisés [MBC<sup>+</sup>95, DCST96, BK02]. Ils permettent, en outre, la modélisation de systèmes complexes dont le comportement stochastique n'est pas forcément Markovien.

La formulation par processus stochastique de la fiabilité et le recours à des méthodes permettant de suivre l'évolution des états d'un système (formulation par l'espace des états, simulation de réseaux de Petri) autorisent une modélisation fine de la fiabilité de systèmes complexes réparables et dont les défaillances des divers éléments ne sont pas forcément indépendantes. Ils permettent la visualisation de la trajectoire suivie par l'état du système au cours de son fonctionnement et de ses éventuelles réparations. Néanmoins, ils présentent les mêmes limites que les précédents modèles de fiabilité, ne proposant ni la prise en compte du comportement physique du système (déterminé en partie par les choix de conception, la définition de ses paramètres de dimensionnement et l'environnement du système), ni la modélisation physique des phénomènes de dégradation qui le perturbent.

**Discipline de la fiabilité dynamique.** Des réponses, concernant la prise en compte de l'évolution continue de paramètres physiques dans les études de fiabilité de systèmes, sont toutefois apportées par les approches développées dans le cadre de la fiabilité dynamique (*Dynamic reliability*) [AR81, DS92]. Celle-ci a pour objectif annoncé de traiter des interactions dépendantes du temps entre des processus physiques propres aux modes de défaillance étudiés (*e.g.* échauffement, évolution de pression) et l'apparition d'événements aléatoires ou déclenchés lors de l'évolution d'un scénario de défaillance (*e.g.* ouverture de vannes, mise en route de pompes). Elle recouvre l'évaluation de systèmes dont le modèle de fiabilité évolue dans le temps en réponse à des événements aléatoires (défaillance d'un composant, par exemple) ou à des changements liés au franchissement de seuils par certaines variables physiques continues agissant sur le système (dépassement d'un niveau de pression dans une enceinte, par exemple). Nous ne rentrons pas ici dans les détails du formalisme mathématique complexe de la fiabilité dynamique qui est défini de manière très complète dans [DS92, Siu94]. Toutefois, il est important de souligner que les approches de fiabilité dynamique reposent sur une représentation du système et de son évolution dans le temps à partir de modèles divers allant des arbres de défaillance dynamiques, aux modèles Markoviens de l'espace des états, aux réseaux de Petri stochastiques, ou encore aux modèles de type *Go-Flow* [LSS00b]. Le raisonnement et le calcul fiabiliste sont menés à partir des taux de défaillance des composants ou des taux de transition entre les divers états des composants et donc du système.

Si l'effet de l'évolution de processus physiques est analysé dans le cadre de ces

<sup>3</sup>Les liens vers les références majeures présentant les divers principes de modélisation et d'analyse par réseau de Petri sont accessibles sur le site Internet "Petri Nets World" - <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/>.

méthodes, celles-ci ne permettent cependant toujours pas de prendre en compte le comportement physique du système déterminé par les choix de conception, par la définition de ses paramètres de dimensionnement et par les sollicitations exercées par son environnement. Les approches propres à la discipline de la fiabilité dynamique présentent, de ce fait, les mêmes limitations que les précédentes en ce qui concerne l'établissement du lien entre la fiabilité ou les modes de défaillance et les paramètres de conception des systèmes.

#### 4.4.3 Conclusion

Les interprétations quantitatives *systèmes sans physique* de la fiabilité sont basées sur la détermination statistique des temps à la défaillance  $T$  des systèmes mécaniques considérés. En fait, l'ensemble des informations concernant la conception et les multiples paramètres physiques qui la caractérisent (*i.e.* les paramètres dimensionnant le système, les contraintes de fonctionnement, les sollicitations extérieures,...) sont combinés et pris en compte de manière implicite au travers de la définition de la distribution probabiliste  $F(t)$  du temps à la défaillance  $T$ . Les principales données nécessaires à leur mise en œuvre (*e.g.* taux de défaillance, taux de transition, modèle statistique de défaillance d'un composant) sont issues de banques de données de fiabilité, du retour d'expérience et des jugements d'experts. Elles ont la capacité de participer à la validation de l'architecture des systèmes mécaniques en fournissant des résultats intéressants du point de vue de la conception, tels que des probabilités de défaillance, des taux de changement d'état et aussi l'influence de la défaillance des composants sur la fiabilité globale du système. Cependant, leur niveau d'abstraction trop élevé n'est pas assez fin pour établir un lien entre ces mesures de fiabilité et les paramètres élémentaires de conception des systèmes mécaniques (*e.g.* caractéristiques matériaux, géométrie, paramètres process, sollicitations extérieures). Trop macroscopiques, elles n'examinent pas d'assez près ni les sources physiques des défaillances ni leur propagation physique.

Comme nous venons de le voir, il existe différentes formulations permettant l'évaluation prévisionnelle de la fiabilité de systèmes plus ou moins complexes et sur la base d'hypothèses plus ou moins restrictives. Pour être complet, nous précisons que, quels que soient les formalismes retenus, malgré l'ensemble des avantages qu'ils peuvent présenter, il est aussi argumenté que l'un de leurs inconvénients majeurs réside dans leur description bas niveau<sup>4</sup> des systèmes et dans la faible capacité de mise à jour des modèles qui en résultent. A partir de ce constat, plusieurs langages de haut niveau<sup>5</sup>, à la fois formels<sup>6</sup> et graphiques, ont été développés (*e.g.* Figaro, AltaRica

<sup>4</sup>Un formalisme de bas niveau est un formalisme exclusif ne permettant pas la modélisation de l'ensemble des caractéristiques d'un système et ne facilitant pas les échanges et les interactions avec d'autres modes de représentation. S'il autorise la création et l'application d'algorithmes de traitement simples et efficaces, il est en revanche pénalisé par son écart au système réel inhérent aux hypothèses de modélisation qu'il nécessite et aux limites de ses capacités de représentation.

<sup>5</sup>Un formalisme de haut niveau est un formalisme d'abord plus proche de la pensée humaine, non tributaire du processeur utilisé et qui permet l'exploitation simultanée ou dans un même cadre d'un certain nombre de formalismes plus bas niveau.

<sup>6</sup>Une méthode formelle peut être définie comme une technique permettant de spécifier un système de manière non ambiguë et permettant de raisonner par le biais de preuves ou de manipulations mathématiques.

[BHMV02, BDRS06, BS06]) pour tenter de :

- dépasser les limites des formulations et des outils classiques,
- d’établir divers ponts entre la sûreté de fonctionnement et les méthodes formelles, les interprétations dysfonctionnelles et fonctionnelles du comportement des systèmes, les divers outils et méthodes d’aide à la modélisation,
- de fournir aux ingénieurs concepteurs de systèmes complexes ou critiques un ensemble d’outils unifiés très performants.

De notre côté, nous retenons essentiellement que la puissance de ces approches pour la modélisation de la logique de défaillance de systèmes complexes ne s’accompagne pas (ou très peu) de la prise en compte de la modélisation des comportements physiques impliqués dans les défaillances. Ainsi, elles n’assurent ni l’établissement des liens entre la fiabilité (ou les modes de défaillance) et les paramètres de dimensionnement des systèmes (attendus au moment de la conception de systèmes mécaniques), ni la caractérisation de l’influence des multiples phénomènes physiques impliqués sur la fiabilité de ces systèmes. Ces enjeux ont plutôt été abordés dans le cadre d’approches fiabilistes physiques nécessaires dans le contexte spécifique du traitement des dispositifs mécaniques.

#### 4.5 Interprétations quantitatives *physiques sans système*

Les composants et les systèmes mécaniques connaissent de nombreux modes de défaillance parmi lesquels nous pouvons citer la déformation, la fissuration, la rupture, l’usure, le vieillissement, *etc...* Leur conception nécessite la justification prévisionnelle du dimensionnement proposé, par rapport à la connaissance de ces modes de défaillance et par rapport à des objectifs de fiabilité prédéfinis. Elle doit donc faire face aux difficultés relatives à la prise en compte et au traitement de défaillances quelles soient progressives et partielles ou soudaines, complètes et irréversibles.

Au dimensionnement fiable de systèmes mécaniques par l’intermédiaire de la notion de contrainte admissible couplée à celle d’un coefficient de sécurité déterministe et subjectif issu essentiellement de la connaissance experte, ont succédé les premières approches probabilistes [May26, Fre47, Rja59, HL74] puis la formalisation et l’avènement des approches mécano-fiabilistes [Lem98, DM96, Lem05b]. Ces dernières font référence à des méthodes qui sont essentiellement développées en relation avec la modélisation des matériaux et des structures mécaniques. Leur finalité est la prise en compte des spécificités de leurs modes de défaillance et des phénomènes qui en sont à l’origine, à des fins de dimensionnement.

Elles se distinguent par la relation étroite qu’elles tentent d’établir entre la fiabilité, la physique de défaillance et les paramètres de conception. La mise en œuvre des outils de modélisation des comportements physiques et de la physique de défaillance de dispositifs mécaniques, et la représentation probabiliste des incertitudes inhérentes à l’activité de conception, assure l’évaluation de mesures de fiabilité telles que : des probabilités de défaillance, des indices de fiabilité, les sensibilités de la défaillance à la description stochastique des paramètres de conception. Dans le cadre de l’annexe B, ces mesures de fiabilité sont d’abord rappelées et ensuite comparées à celles obtenues par l’intermédiaire des méthodes reposant sur une formalisation *système sans physique* du

problème de fiabilité. Les outils nécessaires à leur évaluation sont quant à eux explicités dans l'annexe E.

Les interprétations quantitatives par analyse mécano-fiabiliste fournissent une précision supplémentaire par rapport à des analyses déterministes plus classiques du dimensionnement de structures mécaniques. En outre, elles généralisent les méthodes statistiques de type “contrainte-résistance” (utilisées dans le cadre d'études de fiabilité expérimentale) essentiellement basées sur l'exploitation de données d'essais et de données du retour d'expérience [LM74]. En effet, celles-ci ne permettent bien souvent que la construction implicite des lois de distribution des paramètres globaux “résistance” et “contrainte” et ne donnent aucune visibilité sur leurs dépendances vis-à-vis des paramètres de conception et des phénomènes physiques impliqués dans les défaillances.

#### 4.5.1 Formulation générale au niveau d'un composant

La présentation est fortement inspirée de [Lem05b]. Un système mécanique, soumis à un champ d'actions d'origines diverses, répond en fonction de son architecture, de sa géométrie, des caractéristiques de résistance de ses matériaux constitutifs, des interactions entre les différents éléments qui le composent.

D'un point de vue formel, un système ou un composant mécanique peut être considéré comme un opérateur mathématique  $M(.)$  qui à un certain nombre de données d'entrée (chargements, actions, paramètres géométriques ou de dimensionnement, caractéristiques des matériaux) fait correspondre diverses sorties (besoins ou sollicitations, ressources ou résistance). Soit :

- $A_i(t)$ , les  $i$  données d'entrée du système mécanique, fonction du temps  $t$ , en général le chargement ou les actions.
- $K_j(t)$ , les  $j$  données d'état du système mécanique (sauf celles pouvant être incluses dans les variables de sortie), séparées en deux catégories :
  - $K_{j_f}^f(t)$ , c'est-à-dire les  $j_f$  données imposées par le cahier des charges,
  - $K_{j_p}^p(t)$ , c'est-à-dire les  $j_p$  données à la disposition du concepteur / projeteur.
 La séparation de ces variables peut être utile dans un contexte de conception ou d'optimisation. Elles contiennent les caractéristiques géométriques, celles des matériaux et les conditions limites ;
- $R_l(t)$ , les  $l$  variables identifiant la ressource disponible, en contexte mécanique ce sont principalement les résistances et les déplacements admissibles.
- $S_k(t)$ , les  $k$  variables identifiant les sollicitations.

Un modèle de calcul permet ainsi de simuler, au sens physique, les réalisations des besoins  $S_k(t)$  et des ressources  $R_l(t)$  dans tout le domaine de variation physique des variables  $A_i(t)$  et  $K_j(t)$  (modélisées par des variables aléatoires ou des processus aléatoires). Une réalisation physique du vecteur des données d'entrée  $\{A_i(t), K_{j_f}^f(t), K_{j_p}^p(t)\}$  engendre donc une réalisation des besoins  $S_k(t)$  et des ressources  $R_l(t)$ . Si  $M(.)$  est un opérateur mathématique représentatif du modèle mécanique alors on peut écrire :

$$\{A_i(t), K_{j_f}^f(t), K_{j_p}^p(t)\} \longrightarrow M\left(\{A_i(t), K_{j_f}^f(t), K_{j_p}^p(t)\}\right) = \{S_k(t), R_l(t)\} \quad (4.18)$$

$M(\cdot)$  peut aussi bien être donné de manière explicite par une relation analytique issue d'un développement théorique ou de la construction d'une surface de réponse, que de manière implicite au moyen d'un modèle exploitant un code de calcul éléments finis. Maintenant, la performance du système vis-à-vis d'une règle de fonctionnement  $m$  peut être mesurée par la vérification de l'inégalité :

$$G_m \left( M \left( \left\{ A_i(t), K_{j_f}^f(t), K_{j_p}^p(t) \right\} \right) \right) = G_m(\{S_k(t), R_l(t)\}) > 0, \forall t \in [0, T] \quad (4.19)$$

où  $G_m(\cdot)$  est un opérateur mathématique traduisant la performance du système mécanique et où  $[0, T]$  est la durée de vie exigée ou période de référence pour laquelle le dimensionnement du système mécanique est étudié. Le succès d'un dimensionnement est traduit par le respect de cette inégalité. On définit classiquement :

- une fonction d'état limite ou marge par :

$$G_m(\{S_k(t), R_l(t)\}) = 0 \quad (4.20)$$

- un domaine de sûreté  $\mathcal{D}_s(t)$  :

$$G_m(\{S_k(t), R_l(t)\}) > 0 \quad (4.21)$$

- un domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f(t)$  :

$$G_m(\{S_k(t), R_l(t)\}) \leq 0 \quad (4.22)$$

L'objectif en conception consiste alors à déterminer le meilleur dimensionnement, c'est-à-dire celui qui minimise le non respect de l'inégalité précédente étant donné un niveau de fiabilité imposé. Il s'agit donc de construire les arguments visant à caractériser les valeurs à donner aux variables  $K_{j_p}^p(t)$ . Ceci passe par l'évaluation, pour une fonction de performance donnée, d'un certain nombre de mesures fiabilistes au moyen d'algorithmes et d'outils probabilistes dédiés (Annexe E). Ces mesures de fiabilité sont, par exemple, la probabilité de défaillance  $P_{f\ m} = \Pr(G_m(\{S_k(t), R_l(t)\}) \leq 0)$ , l'indice de fiabilité  $\beta_m$  qui lui est associé ou les sensibilités de ces grandeurs à la description stochastique des données et aux paramètres des modèles.

#### 4.5.2 Couplage mécano-fiabiliste statique

Dans le cadre de l'approche de la fiabilité des structures et du couplage mécano-fiabiliste statique, nous nous intéressons à la détermination de mesures dites "instantanées" permettant d'estimer la fiabilité d'un dispositif (ou sa probabilité de défaillance) et l'influence des variations des données d'entrée (ou données de conception) à une date  $t$  fixée. Nous distinguons les analyses de sensibilité des analyses de fiabilité.

##### Analyse de sensibilité

Disposant d'un modèle mécanique (*resp.* d'une fonction de performance) assurant le passage des données d'entrée (variables de base ou de conception) aux variables de sortie (*resp.* à la variable aléatoire caractérisant la performance du système considéré)

et connaissant la modélisation probabiliste de ces variables d'entrée, l'analyse de sensibilité fiabiliste consiste à estimer les paramètres statistiques des variables de sortie (*e.g.* leur moyenne, leur écart-type, leurs premiers moments). En d'autres termes, elle consiste à caractériser l'impact de la variabilité de l'entrée sur celle de la réponse en évaluant le rapport entre les coefficients de variations<sup>7</sup> respectifs des variables de sortie et des variables d'entrée. Elle détermine si la variabilité d'une donnée d'entrée est atténuée ou au contraire amplifiée à travers la transformation mécanique et permet ainsi la prise en compte des risques associés à l'une ou l'autre de ses variations.

Les méthodes couramment utilisées lors d'analyses de sensibilité sont les méthodes de simulation [Rub81], les méthodes de perturbation par développement de Taylor (*e.g.* [Lem05b]), les méthodes de moments (*e.g.* [SO83, Er98, Bal98]) et plus récemment les méthodes par développement de variables aléatoires sur base de polynômes d'Hermite de type Chaos polynomial [GS91, SBL06]. Quelques unes d'entre elles sont présentées plus en détails en annexe 7.

Dans le cas idéal, où l'on est en mesure de reconstruire la fonction de densité de la variable de performance, nous ajoutons qu'il est possible d'évaluer la probabilité de défaillance et d'estimer par la même occasion l'indice de fiabilité relatif à la fonction de performance considérée.

### Analyse de fiabilité

A partir de la modélisation stochastique des données d'entrée sous la forme d'un vecteur de variables aléatoires  $\mathbf{X} = \{A_i(t), K_{j_f}^f(t), K_{j_p}^p(t)\}$ , de la modélisation mécanique  $M(\cdot)$  caractéristique du fonctionnement du dispositif à une date fixée, et de la définition d'un état limite  $G_m(\cdot)$ , l'objectif principal d'une analyse de fiabilité est de déterminer la probabilité relative à l'occurrence d'une situation inacceptable. Le problème fondamental consiste à évaluer la probabilité de défaillance, notée  $P_{f\ m}$ , donnée par la relation suivante :

$$P_{f\ m} = \Pr[G_m(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) \leq 0] = \int_{G_m(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.23)$$

où  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est la densité conjointe du vecteur des variables aléatoires  $\mathbf{X}$ . Cette intégrale n'a de solution formelle ou numérique simple que dans de très rares situations ou cas d'école. Un autre moyen de résolution consiste à estimer  $P_{f\ m}$  au moyen de simulations directes de Monte Carlo. Cependant, cette approche est à proscrire dès lors que l'évaluation de  $G_m(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) \leq 0$  fait appel à la résolution d'un code de calcul complexe (par éléments finis par exemple) peu économe en temps de calcul. Finalement, une solution est bien souvent obtenue par le biais de diverses méthodes d'approximation comme les méthodes *FORM* (*First-Order Reliability Method*) [HL74, RF78], *SORM* (*Second-Order Reliability Method*) [DKLH87] ou encore les méthodes des tirages d'importance ou des simulations conditionnées [Har86, Mel90]. Une liste plus complète des méthodes d'approximation de la probabilité de défaillance  $P_{f\ m}$ , présentant également

<sup>7</sup>Le coefficient de variation d'une variable aléatoire est simplement défini comme le rapport adimensionnel de son écart-type à sa moyenne.

les principes de chacune d'entre elles, est donnée dans [Häh03]. L'annexe E en décrit les principales.

Dans un deuxième temps, les produits de l'analyse de fiabilité, en particulier à la suite d'une analyse de type *FORM*, incluent : le point de défaillance le plus probable et de multiples facteurs d'importance des variables d'entrée sur ces mesures de fiabilité (Annexe E). Ils constituent des arguments importants en vue du dimensionnement fiable des composants mécaniques ou des structures. Par exemple, l'estimation de facteurs d'importance mécaniques et fiabilistes permettent d'identifier le poids d'une variable d'entrée, c'est-à-dire l'influence de sa variation sur l'état du système mécanique. Le but d'une telle étude est de sélectionner les variables les plus significatives, ce qui permet de mieux les maîtriser selon leur rôle par rapport au comportement mécanique ou à la fiabilité. Les facteurs d'importance généralement calculés dans le cadre d'analyses de fiabilité de structures mécaniques sont définis formellement et explicités en détails dans l'annexe E.

### 4.5.3 Fiabilité des structures dépendantes du temps

Dans ce contexte, nous examinons la défaillance de structures mécaniques résultant de deux familles de phénomènes dépendants du temps et souvent combinés :

- la dégradation progressive des caractéristiques de résistance de la structure (endommagement, fissuration, vieillissement, encrassement,...) ;
- l'action de sollicitations aléatoires dont la nature évolue dans le temps (action climatique, profil de mission dans le cadre de l'automobile,...).

Il en résulte que les états limites, qu'ils soient "ultimes" (défaillance irréversible) ou "de service" (perte de performance), dépendent d'un certain nombre de variables  $\mathbf{X}(t, \omega)$ , où  $t$  exprime leur dépendance par rapport au temps et  $\omega$  leur dépendance à un aléa. Ils font également intervenir des modèles mécaniques évoluant dans le temps. La problématique de la fiabilité des structures dépendantes du temps se pose alors de la manière suivante :

Connaissant une modélisation des variables d'entrée (ou de conception) sous la forme de variables aléatoires  $\mathbf{X}(\omega)$  ou de processus aléatoires  $\mathbf{X}(t, \omega)$  et d'un scénario de défaillance auquel est associée une fonction de performance  $G_m(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ , il s'agit de calculer :

$$\Pr(\exists \tau \in [t_1, t_2] / G_m(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) \leq 0) \quad (4.24)$$

c'est-à-dire la probabilité de l'événement : il existe une date  $\tau$  appartenant à la durée de vie  $[t_1, t_2]$  pour laquelle la structure est défaillante au regard de la règle examinée.

A ce jour, on distingue trois grandes méthodes pour le calcul de cette probabilité de défaillance cumulée :

- les simulations de Monte Carlo,
- les approches asymptotiques,
- la méthode *PHI2*.

L'estimation par simulations de Monte Carlo a pour avantage de fournir des résultats de manière simple, une fois que la discrétisation des processus aléatoires régissant



le problème est effectuée. Seulement, comme pour l'évaluation de la probabilité de défaillance instantanée dans le cadre d'une analyse statique, la précision du résultat est influencée par le nombre de tirages réalisés. Ajouté à la complexité des problèmes traités, le coût de mise en œuvre d'une telle approche est généralement prohibitif.

Les développements théoriques et l'implémentation logicielle relatifs aux approches asymptotiques [Rac98] constituent certainement la réponse la plus évoluée, à ce jour, à bien des problèmes de fiabilité des structures fonction du temps. Toutefois, ils ne permettent pas de traiter des fonctions de performance où seules des variables aléatoires et le temps sont présents ; elle nécessite la présence d'un processus  $X(\tau, \omega)$ . De plus, le mode de description limité des processus aléatoires et le caractère asymptotique des solutions ont incité au développement de l'approche alternative dénommée *PHI2*.

La méthode *PHI2* permet, elle, d'aborder le problème du calcul de la fiabilité dépendante du temps au moyen d'outils classiques de fiabilité instantanée [ARSL04].

Au vu de la synthèse des approches développées jusqu'à présent dans le cadre d'analyses de fiabilité mécanique dépendantes du temps, donnée dans [AR02], il apparaît qu'elles n'ont pas encore atteint le même niveau de maturité que leurs homologues permettant la détermination de mesures de fiabilité dites instantanées. Etant donné que le traitement de la dépendance vis-à-vis du temps des structures mécaniques et la maîtrise de leur fiabilité deviennent un enjeu important pour les industriels, il est évident que les prochaines années verront l'émergence d'un certain nombre de techniques nouvelles et que des outils logiciels dédiés seront également développés.

#### 4.5.4 Limites des interprétations systèmes classiques en fiabilité mécanique

Les approches statiques et dépendantes du temps concernent essentiellement l'étude de composants mécaniques. L'approche système de la fiabilité mécanique et de la fiabilité des structures relève du calcul de la probabilité de défaillance de dispositifs susceptibles de connaître plusieurs modes de défaillance et dont les dégradations ou les défaillances des éléments constitutifs entraînent une modification de la distribution globale des sollicitations. Les principales difficultés résident ainsi dans :

- la prise en compte de l'influence de l'historique du chargement et de sa redistribution complexe après la défaillance ou la dégradation d'un composant ;
- la prise en compte de la physique de défaillance et de la modélisation des scénarios de défaillance systèmes.

La méthode la plus classique et la plus intuitive est issue du concept de chemins de défaillance et de coupes minimales développé dans le cadre de la formulation par fonction de structure introduite précédemment et relevant de la théorie générale de la fiabilité des systèmes. Sa mise en œuvre en est en tout point similaire. Après avoir réalisé une analyse qualitative précise de toutes les causes de défaillance du système, par identification des composants et de leurs interactions, l'information est organisée sous une présentation formelle sur la base de laquelle on détermine les coupes minimales. L'évaluation de la probabilité de défaillance du système est menée à partir de la connaissance des probabilités de défaillance des composants évaluées selon les techniques présentées ci-avant.

Cette méthode et sa formalisation ne permettent toutefois pas l'analyse de problèmes pour lesquels il est nécessaire de considérer la redistribution des efforts à la suite d'une évolution de la configuration locale ou générale du système. L'alternative discutée dans [DB86, Dit87, DM96] consiste à introduire le concept de séquence de défaillance puis à rechercher l'ensemble des configurations stables pour la donnée d'un vecteur d'entrée (*e.g.* vecteur de sollicitations). Elle est vivement critiquée par l'auteur qui stipule qu'elle ne repose sur aucune interprétation physique véritablement claire.

Ces approches systèmes de la fiabilité des structures et des systèmes mécaniques ont fait l'objet de nombreuses publications à la fin des années 80 (*e.g.* [Bje84, Sch85]). Cependant, leur développement n'a pas connu le même essor que celui des méthodes de calcul orientées composants. Avec l'arrivée à maturité de ces dernières, on constate aujourd'hui un nouvel intérêt pour les approches de type système comme en témoigne de récents travaux de recherche [DKDS06, DK06].

#### **4.5.5 Conclusion**

Les approches physiques propres à la fiabilité des structures mécaniques proposent un panel de méthodologies permettant l'évaluation de la fiabilité prévisionnelle de composants et de systèmes mécaniques prenant en compte la modélisation des lois de comportement physique ainsi que les incertitudes inhérentes à la caractérisation de leurs paramètres de conception et des sollicitations qu'elles subissent. Elles autorisent l'estimation de mesures de fiabilité sur la base de l'étude de fonctions de performance ou d'états limites caractérisant aussi bien des défaillances progressives et partielles que des défaillances brutales ou complètes. Elles établissent aussi des relations directes (mesures d'importance) entre les mesures de fiabilité des dispositifs, leurs paramètres de dimensionnement et les sollicitations dont ils font l'objet. Enfin, des formalismes appelant une résolution au moyen d'outils mathématiques plus ou moins complexes, ont été développés pour la prise en compte spécifique de phénomènes évolutifs et de la dépendance au temps des mesures de la fiabilité.

Toutefois, l'inconvénient majeur de ce type d'approches relève essentiellement des limites des formalismes actuellement disponibles pour l'études de la fiabilité de problèmes pour lesquels une vision système est requise.

### **4.6 Interactions avec le processus de conception de systèmes mécaniques**

Nous avons déjà eu l'occasion de préciser que l'évaluation et l'élaboration de la fiabilité au cours du processus de conception industriel de systèmes mécaniques complexes constituent des enjeux majeurs. Dès les premières phases et jusqu'à la fin du développement d'un produit, les acteurs de la conception fiable (parmi lesquels nous dénombrons, les concepteurs, les mécaniciens, les fiabilistes, les statisticiens et le décideur [Lem04]) doivent s'assurer que les différents choix permettent bien la convergence du produit final vers un niveau de performance et de fiabilité requis ou objectif. La stimulation de leur synergie tout au long de l'activité de conception est un gage d'optimisation continue de la définition des systèmes mécaniques en cours de développement.

#### 4.6.1 Fiabilité et processus de conception systématique

Si l'on en considère une décomposition systématique classique<sup>8</sup> [PB96, UII97], un processus de conception industrielle se divise fondamentalement en trois grandes phases : la conception conceptuelle ou *conceptual design*, la conception préliminaire ou *embodiment design* et la conception détaillée ou *detail design*. En fait, l'applicabilité et l'efficacité des méthodes classiques de fiabilité explicitées précédemment, ainsi que la capacité de leurs résultats à favoriser des interactions avec les concepteurs dépendent fortement de ces différentes étapes de la conception (Fig. 4.1).

##### Conception conceptuelle

La conception conceptuelle (*conceptual design*) est généralement précédée d'une démarche préliminaire de planification et clarification des tâches définissant le projet de développement du produit. Celle-ci repose en partie sur l'analyse de marché, les méthodes de sélection des idées de produit, la rédaction de lettres d'intention, la définition des jalons du développement du système et des attendus aux jalons etc.

Sur le plan technique, la conception conceptuelle correspond à l'étape de génération des idées, de l'analyse fonctionnelle du système et de la définition des solutions de principes envisageables. L'analyse fonctionnelle (AF) et la méthode *FAST* (*Function Analysis System Technique*) [Aki91], l'analyse de la valeur (AV) [Fow90, Yan98], le déploiement de la fonction qualité (QFD) [Aka04], les méthodes de créativité telles que *TRIZ* [Sav02], les techniques de *brainstorming* et d'analyse de la concurrence sont autant d'outils et de techniques dont l'exploitation favorise le bon déroulement de cette phase initiale de la conception.

Classiquement, les analyses des risques et de défaillance qualitatives sont déployées à ce moment précis de la conception. Les Analyses Préliminaires des Risques (APR), les Analyses des Modes de Défaillance de leurs Effets et de leur Criticité (AMDEC), les analyses par arbre des causes ou par arbre des conséquences visent ainsi à garantir que tous les modes de défaillance potentiels du système sont bien identifiés et seront couverts par la mise en œuvre de plans d'actions ou de plans de validations adéquats. Généralement, les multiples scénarios qui leur sont associés sont également décrits de manière exhaustive afin d'être étudiés plus finement par la suite, en vue d'une interprétation quantitative.

##### Conception préliminaire

La conception préliminaire (*embodiment design*) consiste à développer la définition technique et l'architecture initiale du système mécanique, à partir du principe de solution retenu à la fin de l'étape précédente. La structure finale du système prend forme de manière itérative pendant qu'une première évaluation de ses performances est réalisée sur la base de modèles simplifiés : le respect de règles de conception génériques est vérifié et validé. Des maquettes et des premiers prototypes sont construits et fabriqués pour s'assurer de la faisabilité du nouveau produit. La qualité de la conception

---

<sup>8</sup>Il existe d'autres formalisations possibles du processus de conception de systèmes mécaniques [Tol98, Yan01]. Nous avons volontairement retenu l'une des plus simples et des plus couramment utilisées dans la pratique.

est également déjà estimée par rapport à divers objectifs technico-économiques (coût, fabrication, fiabilité,...) et des actions correctives sont entreprises si nécessaire.

Dans la pratique, au cours de cette étape, l'interprétation et l'évaluation quantitatives de la fiabilité sont uniquement réalisées au moyen de modèles de type *système sans physique*. Pourtant, on dispose dès à présent des éléments nécessaires et d'une quantité d'informations objectives déjà non négligeable pour l'application de méthodes de fiabilité bénéficiant de la modélisation du comportement physique des systèmes examinés.

### Conception détaillé

La conception détaillée (*detail design*), aussi dénommée conception paramétrique, participe à la validation et à l'amélioration de la conception préliminaire. Elle assure le dimensionnement final de l'ensemble des pièces du système et sa définition complète en vue de sa fabrication. L'évaluation des performances du système est cette fois réalisée sur la base de modèles physiques affinés et le respect de l'atteinte de ses différents objectifs est vérifié. La simulation numérique est donc exploitée de manière intensive. Des campagnes d'essais de validations et de fiabilité viennent parachever ce processus. Elles sont mises en œuvre de manière optimisée par le déploiement de plans d'expériences (PLEX) appropriés [Sch98].

Au cours de cette étape, on continue d'utiliser les méthodes de fiabilité exploitant des représentations *systèmes sans physique*. Elles sont complétées par la réalisation et l'interprétation d'essais de validation et d'essais de fiabilité, accélérés ou non [BN02]. Alternativement, on tire enfin avantage de l'implémentation de modèles *physiques sans système* de la fiabilité et des principaux résultats de leur évaluation.

#### 4.6.2 Conception pour la fiabilité : perspectives et enjeux d'évolution

D'une part, l'étude de l'état de l'art des interprétations quantitatives classiquement exploitées dans le cadre d'analyses de fiabilité de systèmes matériels a montré que celles-ci se répartissent dans deux grandes familles que nous avons présentées sous les terminologies de représentations *système sans physique* et *physique sans système* du problème de fiabilité. Ces deux types d'approche sont issus de deux disciplines fiabilistes distinctes aux origines pourtant identiques. Nous avons d'ailleurs mis en exergue leur complémentarité, en particulier en ce qui concerne leur formalisme et la nature des problèmes qu'elles permettent de traiter. Malgré tout le potentiel des techniques développées dans le cadre des interprétations *systèmes sans physique*, aucune d'entre elles ne permet d'établir les liens entre la fiabilité d'un système et la définition conjointe de ses paramètres de dimensionnement et de ses paramètres sollicitants. Les représentations *physiques sans système* du problème de fiabilité proposent, quant à elles, un certain nombre d'outils assurant la prise en compte de la physique de défaillance ainsi que l'évaluation de l'impact du dimensionnement, des conditions de fonctionnement et de leurs incertitudes de caractérisation sur le comportement et la fiabilité d'un dispositif mécanique. Toutefois, des développements sont encore nécessaires au niveau des méthodes d'évaluation de la fiabilité dépendante du temps et des efforts doivent être poursuivis au niveau de la formalisation *physiques et systèmes*

de la fiabilité mécanique.

D'autre part, le positionnement des approches quantitatives classiques de la fiabilité dans le cadre d'un processus de conception pour la fiabilité (Fig. 4.1) a permis de confirmer leur complémentarité. Il a également participé à préciser qu'elles sont appliquées de manière indépendante, à des instants différents d'un processus de conception classique. Il a enfin réaffirmé l'aptitude des analyses physiques à interagir de manière plus fine avec les métiers de la conception et du dimensionnement des systèmes mécaniques bien qu'elles ne soient mises en œuvre que très (trop) tard dans un processus de conception classique.

Cette réflexion nous amène naturellement à l'identification des perspectives et aux propositions d'évolutions suivantes :

1. Une démarche de conception pour la fiabilité de systèmes mécaniques a tout intérêt à bénéficier d'une vision et d'une interprétation unifiées des scénarios de défaillance, c'est-à-dire à la fois *physique et système*.
2. Elle doit également pouvoir bénéficier de l'exploitation des produits des analyses (et de leur impact sur la définition des paramètres élémentaires de conception - Fig. 4.1) dès les premières itérations de la conception préliminaire, dès lors que l'on dispose des premiers éléments de modélisation des lois régissant les comportements du système physique ou sa physique de défaillance.

## **4.7 Conclusion du chapitre : vers une démarche fiabiliste multidisciplinaire, système et physique**

Sur la base du constat précédent, nous proposons de développer une approche de fiabilité prévisionnelle originale et multidisciplinaire se distinguant par :

- l'intégration de la modélisation de la physique dans les scénarios de défaillance systèmes issus d'analyses qualitatives exhaustives ;
- un traitement mécano-probabiliste pertinent prenant en compte les incertitudes inhérentes à l'activité de conception, que ce soit au niveau de la caractérisation des paramètres de conception élémentaires comme au niveau de la caractérisation de l'environnement du système et de ses effets sur ce dernier ;
- le caractère évolutif du modèle de fiabilité système et physique résultant. Il a pour caractéristique d'être exploitable dès la phase de conception préliminaire. Il s'affine au fur et à mesure que l'on progresse à travers les diverses itérations de conception. Il s'adapte à la connaissance disponible pour fournir à chaque instant du processus de conception des informations capitales au niveau de l'évaluation et de l'élaboration de la fiabilité des systèmes mécaniques.

La démarche que nous suggérons a également pour vocation principale d'accompagner, de guider, les différentes étapes d'un processus de conception industrielle en assurant à chaque instant la définition d'arguments adéquats pour l'aide au dimensionnement optimal par la fiabilité. Elle repose sur la synergie des acteurs de la conception fiable que sont les concepteurs, les fiabilistes, les mécaniciens, les statisticiens et les spécialistes du calcul probabiliste. La figure 4.5 inspirée de [Lem04] présente ces différents acteurs. La spirale souligne l'enchaînement des rôles de chacun et la nécessité de

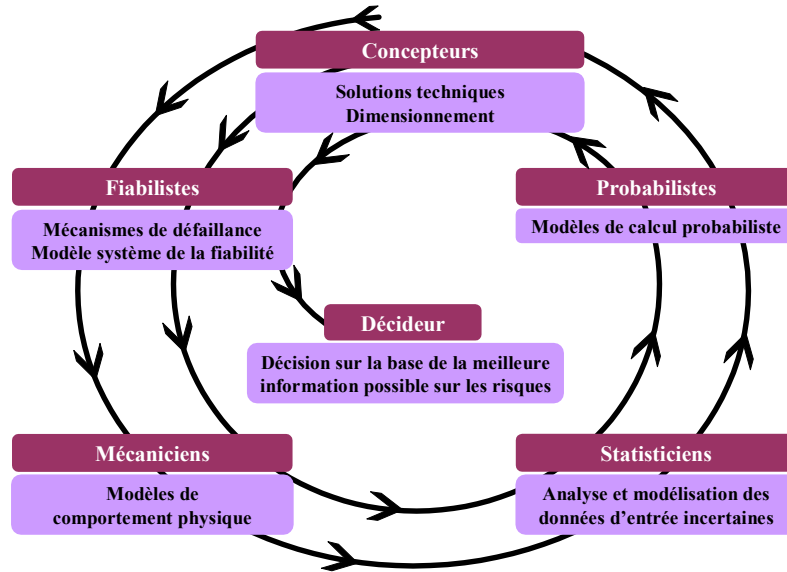


FIG. 4.5 – Les acteurs de la conception fiable et leurs interactions.

leur dialogue permanent pour permettre au décideur collectif de prendre la meilleure décision pour une conception robuste et fiable. Nous précisons que l'ordre indiqué sur le schéma n'est en rien imposé : dans la pratique l'ordre des échanges sera décidé afin d'optimiser l'efficacité des interactions entre les multiples acteurs. Les cinq étapes fondamentales de la méthodologie que nous proposons se traduisent alors par (Fig. 4.6) :

1. l'interprétation physique et logique des scénarios de défaillance sur la base d'analyses de défaillance qualitatives exhaustives. Elle conduit à l'identification de la structure d'un modèle de fiabilité quantitatif, système et physique. Cette activité est principalement du ressort des analystes fiabilistes.
2. la modélisation probabiliste évolutive des paramètres élémentaires de défaillance (*i.e.* des paramètres de conception) par actualisation Bayésienne de la connaissance disponible et la modélisation mathématique évolutive des phénomènes physiques par l'exploitation de métamodèles. Le premier effort de modélisation est essentiellement réalisé par les statisticiens. Le second est d'abord l'affaire des mécaniciens ; ils peuvent toutefois bénéficier de l'expertise des statisticiens pour le développement de métamodèles adaptés.
3. l'implémentation d'une méthodologie de propagation de l'aléa sur les données d'entrée et sur les comportements physiques. Elle repose sur l'approximation de variables aléatoires quelconques par une méthode de développement sur la base d'un chaos polynomial. Elle est implémentée par les probabilistes.
4. le traitement original d'un tel modèle de fiabilité grâce aux outils classiques du couplage mécano-fiabiliste. Différentes stratégies d'analyse sont déployées par les analystes probabilistes. En particulier, nous introduisons le concept d'études *FORM* de type "court-circuit". Elles assurent :

- l'estimation de mesures de performance et de fiabilité à différents niveaux du modèle global (probabilités de défaillance ou de fonctionnement dégradé) ;
- l'explicitation du rôle et de l'influence sur la fiabilité du système des paramètres ou des phénomènes physiques intervenant à chacun de ces niveaux ;
- la construction de chaînes de mesures d'importance assurant l'identification des séquences phénoménologiques les plus critiques vis-à-vis de la fiabilité du système.

A la fin de cette étape, le décideur tranche et décide de la validation ou non de la conception. Si celle-ci n'est pas satisfaisante, elle est améliorée.

- l'optimisation de la conception et la mise à jour du modèle global par les concepteurs. Ces résultats favorisent le pilotage d'un processus de conception pour et par la fiabilité en fournissant de véritables arguments d'aide au dimensionnement fiable et en participant à la définition de plans d'actions et de validations.

Les verrous scientifiques et techniques propres à chacune de ces étapes sont examinés au cours des chapitres suivants. Des solutions originales sont proposées.

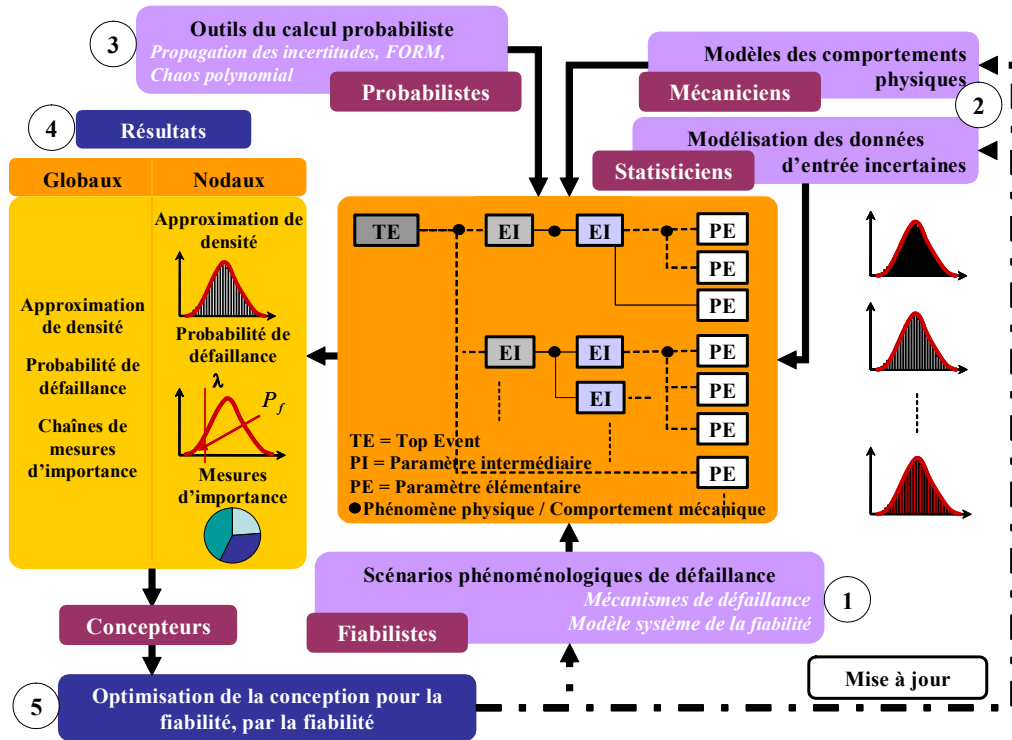


FIG. 4.6 – Schéma synoptique de l'approche proposée.

## Chapitre 5

# Scénarios de défaillance phénoménologiques et systèmes

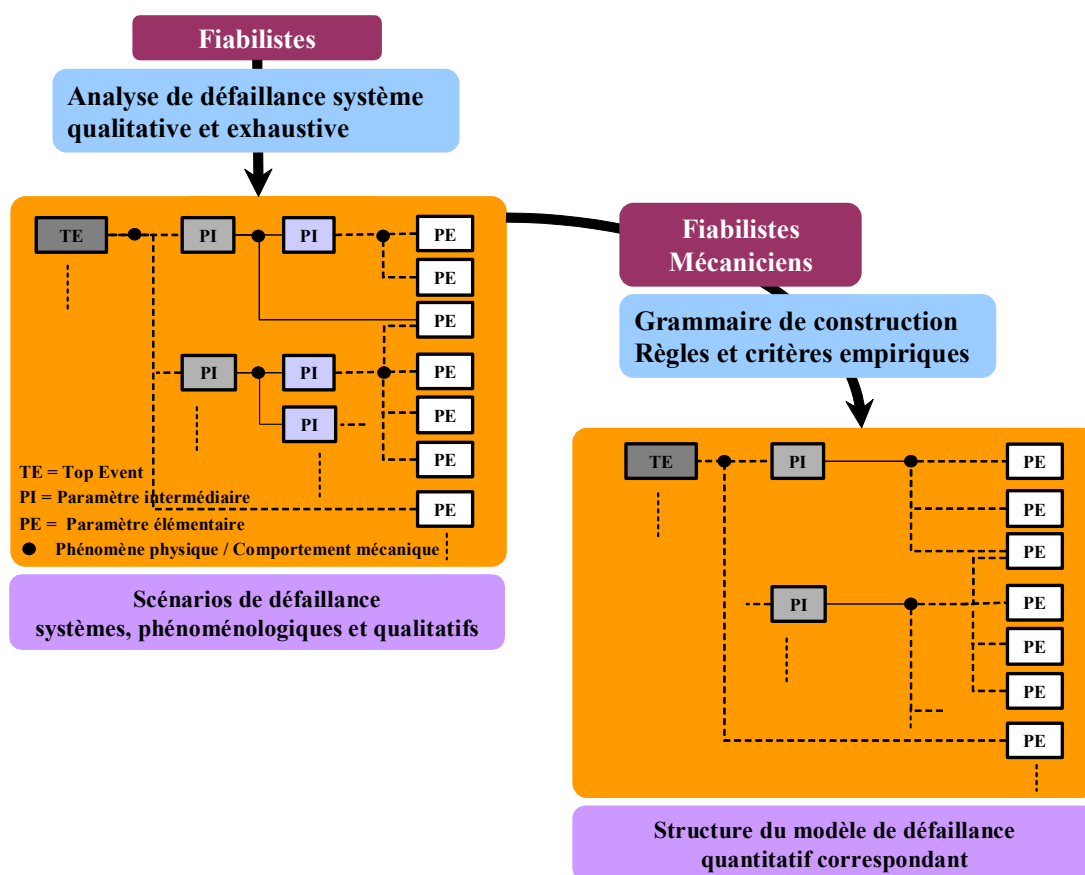


FIG. 5.1 – Elaboration de la structure des scénarios physiques et quantitatifs.



## 5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de définir dans le détail, les étapes successives et les principes de la création de la structure de scénarios de défaillance phénoménologiques (Fig. 5.1). Ces scénarios, à la fois logiques et physiques, constituent la base de la méthodologie proposée. La définition de leur structure est essentielle dans le sens où elle impacte directement la complexité de mise en œuvre et la valeur ajoutée du traitement fiabiliste quantitatif que nous suggérons.

La première tâche consiste à réaliser une analyse de défaillance classique, qualitative et exhaustive, en prenant bien soin de toujours raisonner à partir des comportements mécaniques et des phénomènes physiques mis en jeu. Orchestrée par les fiabilistes, elle constitue un prérequis indispensable assurant l'identification et la description de l'ensemble des scénarios phénoménologiques de défaillance du système étudié.

Ensuite, il s'agit d'élaborer la structure du modèle quantitatif correspondant. Tout en respectant les résultats fondamentaux de l'étude qualitative, son niveau de détail doit être déterminé, au juste nécessaire, par rapport aux objectifs de l'analyse de fiabilité et par rapport aux moyens de modélisation. Cette tâche est réalisée conjointement par les fiabilistes et les mécaniciens. D'une part, nous justifions l'intérêt d'une approche fiabiliste reposant sur une telle décomposition des scénarios de défaillance phénoménologiques. D'autre part, nous définissons les bases d'une grammaire spécifique pour la construction générique et optimisée de la structure du modèle quantitatif. Cette grammaire repose sur des règles heuristiques et sur des critères de granularité spécifiques.

Enfin, nous illustrons nos propos en considérant le problème simplifié d'étanchéité aux gaz au niveau d'un joint de culasse de moteur Diesel d'automobile. Nous isolons donc un aspect particulier de l'exemple conducteur global que nous avons introduit dans le chapitre 3 (Fig. 3.4).

## 5.2 Analyse de défaillance qualitative et physique

### 5.2.1 Une démarche générique et systématique

Toute démarche globale d'analyse de risque et de fiabilité prévisionnelle de systèmes mécaniques en cours de développement comprend une phase essentielle correspondant à l'identification qualitative de ses modes de défaillance potentiels. Au delà de sa capacité à exhiber les modes de défaillance, celle-ci a également pour rôle l'investigation exhaustive des scénarios de défaillance. Autrement dit, il s'agit de recenser l'ensemble des causes à l'origine des défaillances, à savoir les séquences logiques et physiques susceptibles d'y contribuer. Idéalement, l'analyse redescend jusqu'aux phénomènes physiques élémentaires et aux paramètres de conception que les ingénieurs sont en mesure de contrôler. L'exhaustivité est un gage de qualité : il ne sert à rien de construire et d'évaluer un modèle de fiabilité quantitatif ne prenant pas en compte une ou plusieurs causes majeures de défaillance.

La démarche générique et systématique d'analyse de fiabilité qualitative que l'on met en œuvre est illustrée dans le schéma de la figure 5.2.

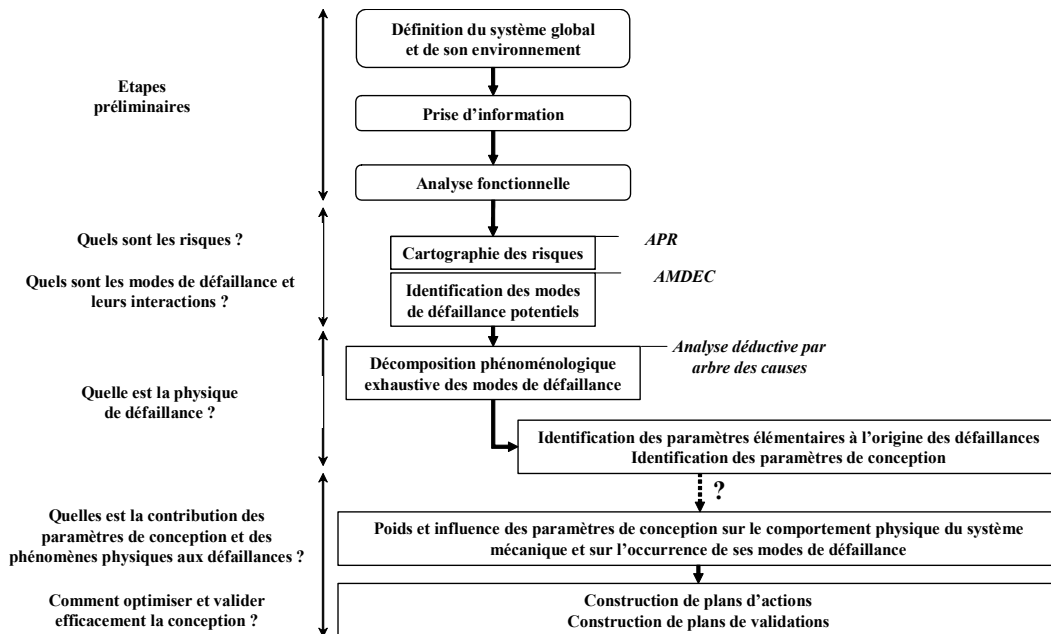


FIG. 5.2 – Etapes de l’analyse de défaillance qualitative et physique exploitée.

### Etapes préliminaires

Au cours du processus de développement d’un système mécanique, un certain nombre de tâches précède nécessairement la réalisation des analyses de fiabilité qualitatives. Parmi celles-ci, la définition globale du système et de son environnement ainsi que son analyse fonctionnelle sont primordiales.

A partir de la description générale du système et de l’environnement dans lequel il sera amené à évoluer, l’analyse fonctionnelle est réalisée par les concepteurs. Elle se décline généralement en deux composantes distinctes : l’Analyse Fonctionnelle du Besoin (AFB) et l’Analyse Fonctionnelle Technique (AFT). L’AFB précise le besoin auquel doit répondre le produit et traduit les attentes en termes fonctionnels. L’AFT permet elle, pour un principe de solution retenu, de définir les fonctions à remplir par ses futurs composants et d’orienter la conception pour assurer le développement du produit au meilleur coût (analyse de la valeur) et présentant un niveau de risque admissible conforme aux objectifs fixés (ce qui nous intéresse plus particulièrement ici). Dès les premières propositions de concepts de solution, dès la définition des premières solutions techniques envisagées, le rôle du fiabiliste consiste à se renseigner et à réunir l’ensemble des informations pertinentes pour la préparation des analyses de défaillance qu’il sera amené à déployer par la suite.

### Analyse Préliminaire des Risques

A partir de l’analyse fonctionnelle, l’Analyse Préliminaire des Risques (APR) assure d’abord l’établissement d’une cartographie des risques (Fig 5.3). Elle identifie, pour chaque élément susceptible d’en présenter et de manière macroscopique :

APR		Système : Attelage mobile – bague piston				
Fonction	Mode de défaillance	Effets systèmes	Effets clients	Gravité	Causes principales	Validations
Transférer la pression de combustion et les efforts d'inertie du piston vers l'axe Assurer la liaison pivot glissant	Grippage de l'axe de piston	Grippage piston Bruyance piston ...	Casse moteur Bruyance ...	5 3	Jeu axe/piston Etat de surface Géométrie Caractéristiques matériaux Lubrification ...	Respect des préconisations Campagne d'essais Calcul de dimensionnement ...
...	...	...	...	...	...	...
Evacuer une partie des calories du piston vers la bielle	Température excessive au niveau de l'axe de piston	Fissuration des bossages d'axe Tenue thermomécanique du piston ...	Bruyance Consommation d'huile	3 2	Pression de combustion Température des gaz de combustion ...	Calcul des écarts de température au niveau des bossages avec et sans bague ...

FIG. 5.3 – Formalisme classique d'une APR.

- les dysfonctionnements possibles,
- leurs conséquences sur le système.

Elle établit des liens directs entre les différentes fonctions du système, leurs modes de défaillance potentiels, les principaux phénomènes physiques impliqués et les effets indésirables qu'ils peuvent générer au niveau du client. Une première mesure de gravité des effets indésirables est aussi renseignée. En conséquence, les objectifs de fiabilité peuvent être alloués au système et à ses composants.

La finalité de l'APR, outre l'identification et la hiérarchisation des modes de défaillance et des événements indésirables clients, consiste à construire les plans de validations initiaux des composants du système. Ceux-ci se traduisent par la donnée d'une série d'études supplémentaires et complémentaires (*e.g.* AMDEC, Analyse par arbre des causes). Ces dernières visent à s'assurer que toutes les actions nécessaires pour assurer la couverture ou la maîtrise des risques et des modes de défaillance associés sont bien déployées.

### Analyse des Modes de Défaillance de leurs Effets et de leur Criticité

L'Analyse des Modes de Défaillance de leurs Effets et de leur Criticité (AMDEC) s'appuie sur l'analyse fonctionnelle et éventuellement sur la donnée d'une APR. Elle propose une identification des modes de défaillance des composants du système qui se veut plus spécifique et donc plus fine que cette dernière. L'objet d'une telle analyse consiste d'abord à renseigner l'ensemble des modes de défaillance, leurs causes d'ordre un et leurs impacts sur le fonctionnement du système. L'AMDEC propose aussi une estimation essentiellement qualitative de la criticité ( $C$ ) d'un mode de défaillance en exploitant une triple cotation en gravité ( $G$ ), fréquence d'occurrence ( $F$ ) et détection ( $D$ ). Sur la base de cette triple cotation, elle oriente vers les actions correctives à engager en vue de définir d'éventuels remèdes (analyses supplémentaires, campagne d'essais, campagne de calculs). Le tableau d'AMDEC (Fig. 5.4) permet enfin d'assurer le suivi du plan d'actions et de visualiser l'évolution de l'indice de criticité ( $C$ ).

AMDEC		Système : Bas moteur											
Composant	Fonction	Défaillances			Criticité				Actions correctives		Evolution		
		Modes	Causes	Effets	G	F	D	C	Action	Délai	Nouveau C		
Carter-cylindres	Refroidissement aux inter-fûts	Fissuration	Fuite	Fatigue thermomécanique	9	4	1	36	Essais d'endurance	Planning des validations	A renseigner		
			Augmentation de la consommation d'eau	Corrosion (liquide de refroidissement)	9	4	1	36	Calculs thermomécaniques				
			Perte de performance	Dimensionnement	9	4	1	36	Homologation du liquide de refroidissement				
			Panne immobilisante	Santé matière	9	3	1	27	Contrôle de fonderie				
			Casse moteur	Causes liées au process	9	5	5	225	Validation produit / process				
		...	...	...	...	...	...	...					
	....												
	...												
...													

FIG. 5.4 – Formalisme classique d'une AMDEC.

La description des modes de défaillance obtenue dans le cadre d'une AMDEC demeure cependant trop macroscopique lorsqu'il s'agit de passer à une interprétation quantitative, à forte valeur ajoutée, de la fiabilité du système étudié. Pour cette raison, il est nécessaire de procéder à une description plus détaillée des causes successives qui sont à l'origine des défaillances. En particulier, nous cherchons à établir l'ensemble des liens événementiels et phénoménologiques entre les paramètres de conception maîtrisés par le concepteur et les modes de défaillance identifiés au cours de l'AMDEC.

### Analyse déductive des causes à l'origine des modes de défaillance

L'analyse déductive par arbre des causes [Vil88] permet typiquement de décrire les divers scénarios à l'origine des modes de défaillance d'un système. Le point de départ de ce type d'étude n'est autre que la considération des modes de défaillance communément appelés événements sommets ou *Top Events*. Ils constituent ainsi le niveau correspondant à la tête de l'arbre. Pour chaque *Top Event*, on recherche les événements et leurs combinaisons qui en sont directement à l'origine. Cette opération détermine le niveau de la décomposition arborescente immédiatement rattaché au niveau de tête. On progresse ensuite, de manière séquentielle, jusqu'à l'identification des événements et des paramètres élémentaires à l'origine de la défaillance. Elle conduit à l'identification qualitative de l'ensemble des séquences logiques à l'origine de la défaillance. Afin de prendre en compte la physique de défaillance en plus de sa logique, une adaptation de ce type d'analyse déductive par arbre des causes est nécessaire. Elle est décrite plus en détails dans la sous-section suivante.

Finalement, la réalisation d'une telle étude permet de disposer d'un modèle qualitatif détaillant de manière complète l'ensemble des liens logiques et physiques entre les modes de défaillance du système et les événements élémentaires impactant le fonctionnement de ses composants.

## Synthèse

Nous venons d'introduire de manière très générale les composantes fondamentales de la démarche générique et systématique d'analyse de fiabilité qualitative que nous exploitons. Elle constitue un prérequis indispensable à l'élaboration de la structure de scénarios phénoménologiques des défaillances d'un système mécanique et à leur interprétation quantitative.

En effet, à ce stade, nous ne disposons au mieux que de considérations qualitatives et empiriques sur les paramètres de conception et sur les phénomènes physiques qui influencent le plus l'occurrence des défaillances. Nous ne sommes donc pas en mesure de déterminer clairement les contributions des paramètres de conception, ainsi que celles des phénomènes physiques et de leurs combinaisons, à la fiabilité du système (Fig. 5.2). En conséquence, une interprétation quantitative, favorisant de surcroît les synergies des différents acteurs de la conception fiable, est indispensable pour :

1. estimer diverses mesures de fiabilité.
2. participer de manière plus efficace à la définition des actions à entreprendre sur les points critiques et à l'enrichissement des plans de validations des systèmes et de leurs composants.
3. accompagner les choix de conception et aider à l'optimisation du dimensionnement sous les contraintes imposées par les objectifs de fiabilité.

La représentation quantitative du problème de fiabilité que nous suggérons repose sur la modélisation physico-probabiliste des scénarios de défaillance. La première étape du processus de modélisation consiste à s'appuyer sur la donnée de scénarios physiques qualitatifs, caractérisés de manière exhaustive, pour définir la structure de scénarios phénoménologiques quantitatifs. Toutefois, le passage de l'un à l'autre des formalismes n'est pas immédiat. Après une brève description des principes d'élaboration de scénarios de défaillance physiques qualitatifs, la deuxième section présente les différents aspects de la caractérisation de la structure des scénarios quantitatifs.

### 5.2.2 Elaboration de scénarios de défaillance physiques qualitatifs

Le raisonnement classique qui accompagne l'analyse de défaillance déductive, introduit précédemment, se distingue essentiellement par son caractère logique quasi-exclusif. S'il est tout à fait adapté pour traiter des défaillances de systèmes électro-niques, il ne permet pas l'analyse optimale des défaillances de systèmes mécaniques. A la représentation logique de leurs défaillances doit être associée une dimension physique (Chapitre 4). Nous proposons ainsi la mise en œuvre d'une approche déductive similaire à la démarche classique, précédemment décrite, mais dédiée à la caractérisation des scénarios de défaillance de systèmes mécaniques [HRL05].

L'analyse repose autant sur la définition technique des systèmes examinés que sur la connaissance experte des mécanismes physiques impliqués dans la défaillance, de leurs enchaînements et combinaisons logiques. Le formalisme arborescent résultant de son implémentation (Fig. 5.5) présente des spécificités notables comparées aux arbres de défaillance classiquement déployés dans le domaine de la sûreté de fonctionnement et de l'analyse de la fiabilité des systèmes [VGND81]. En particulier :

- A partir de l'identification d'un mode de défaillance (*Top Event*), la décomposition progresse de manière horizontale selon une procédure de passage, d'un niveau à un autre, de type "effet - mode - cause". Cette procédure est gouvernée par des considérations physiques. Le but est de se ramener, dès que possible, à l'analyse qualitative de problèmes élémentaires découplés de type "contrainte/résistance".
- Les portes logiques (*e.g.* "et", "ou") figurant dans les arbres de défaillance usuels ne sont pas représentées. L'ensemble des nœuds de l'arbre possède une double signification logique et physique. En fait, celle-ci est explicitée et complètement définie de manière quantitative par la donnée d'un modèle de loi de comportement (Chapitre 6).
- Des règles définissant l'arrêt de la décomposition et donc son niveau de finesse sont appliquées. Généralement, elles s'imposent d'elles-mêmes lorsque l'on atteint par exemple :
  - une spécification propre à une pièce (longueur, diamètre d'un axe...)
  - une caractéristique matériau (module d'Young, coefficient de dilatation,...)
  - une sollicitation d'entrée du système (effort, régime moteur,...)
  - un paramètre de fonctionnement (température d'air, pression,...)
  - un paramètre process (pression d'injection dans un moule,...)
  - une cause relevant d'une erreur humaine (oubli, mauvaise manipulation,...)

Toutefois, dans certains cas, et sans remettre en cause l'homogénéité de la décomposition globale, il peut être intéressant de poursuivre le développement de l'arbre plus loin lorsque le paramètre est difficilement mesurable ou mal connu afin de définir les conditions selon lesquelles il va être possible de le caractériser.

- Une fois que les paramètres élémentaires ont été identifiés, ils sont hiérarchisés en fonction de la connaissance que l'on en a et du niveau de criticité qu'ils présentent par rapport à la défaillance.

L'identification des scénarios de défaillance, au moyen de ce processus original d'analyse déductive, ne propose donc pas une description de séquences binaires d'événements comme c'est le cas dans la démarche classique. Il s'attache plutôt à rendre compte des séquences phénoménologiques continues impliquées dans la réalisation des modes de défaillance. Il est essentiel de retenir qu'elle se traduit par leur représentation qualitative suivant un formalisme arborescent où :

- la tête de l'arbre correspond aux phénomènes au travers desquels se manifestent les modes de défaillance. Dans le cas des groupes motopropulseurs d'automobile, des exemples de *Top Events* généralement rencontrés sont des ruptures, des fissurations, des fuites, des encrassements,...
- le niveau racine renseigne les paramètres de conception et les phénomènes physiques élémentaires à l'origine de ces défaillances.
- les niveaux intermédiaires renferment des paramètres et des phénomènes physiques générés par les effets et les combinaisons successives de paramètres et de phénomènes physiques plus élémentaires.

Finalement, si nous considérons les scénarios de défaillance comme une fonction de transfert globale de type boîte noire qui traduit l'effet des paramètres de conception sur les défaillances éventuelles d'un système mécanique, la méthode dont nous proposons

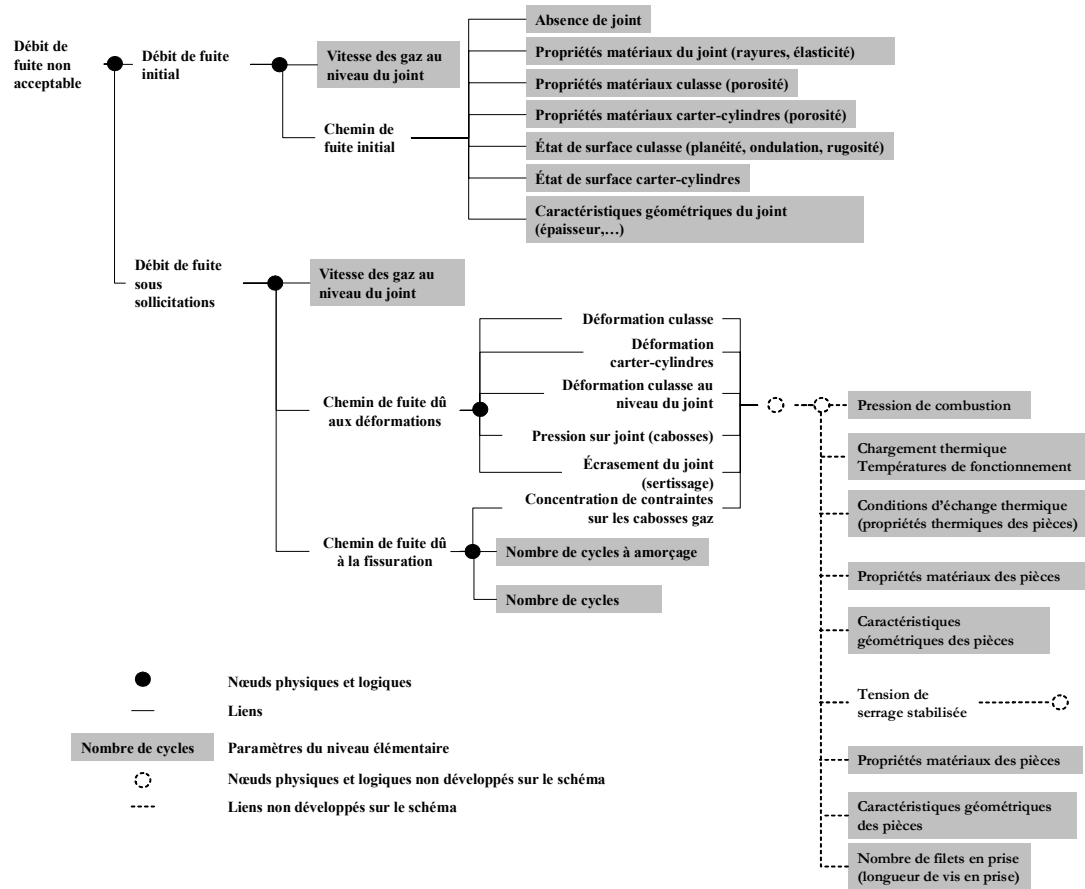


FIG. 5.5 – Etanchéité aux gaz au joint de culasse - Scénarios de défaillance physiques qualitatifs (décomposition simplifiée et volontairement incomplète).

l'utilisation générique et systématique assure :

1. l'identification de l'ensemble des paramètres de conception ayant une influence potentielle sur les multiples modes de défaillance potentiels d'un système mécanique ;
2. l'identification de la fonction de transfert globale (scénarios de défaillance) par sa décomposition exhaustive en fonctions de transferts élémentaires (*i.e.* phénomènes physiques).

### 5.3 Structure des scénarios physiques quantitatifs

La connaissance qualitative au niveau des phénomènes et des grandeurs physiques, entrant en jeu dans des scénarios de défaillance, est maintenant utilisée afin d'obtenir une représentation favorisant leur traitement quantitatif. La construction de tels modèles d'évaluation de la fiabilité est confrontée à trois problématiques principales :

1. La première consiste à justifier la pertinence du choix d'une approche par la décomposition :
  - Est-il judicieux de conserver l'ensemble de la décomposition qualitative exhaustive en vue d'une modélisation puis d'un traitement quantitatif visant à estimer des mesures de fiabilité ?
  - Quel est l'intérêt de travailler sur un modèle quantitatif éclaté plutôt que de raisonner directement sur une fonction de transfert globale (Fig. 5.6) ?

Ainsi, nous présentons d'abord les enjeux et la valeur ajoutée attendue, d'une démarche quantitative d'estimation de la fiabilité de systèmes mécaniques par la décomposition et l'analyse physique de leurs scénarios de défaillance.

2. La deuxième concerne l'élaboration de règles génériques, d'une ébauche de grammaire, visant à assurer la définition optimale du niveau de finesse de la structure d'un modèle quantitatif éclaté.

Nous fournissons donc, ensuite, les éléments d'un guide (d'une *checklist*) favorisant le passage d'une vision qualitative à une approche quantitative par la modélisation des comportements physiques.

3. La troisième est relative à la définition formelle des scénarios de défaillance physiques et quantitatifs.

Nous proposons donc, enfin, un formalisme mathématique adapté à l'intégration souple et pratique :

- de la modélisation des paramètres élémentaires (Chapitre 6),
- des phénomènes physiques identifiés en chaque nœud des scénarios (Chapitre 6),
- des fonctions de performances (intermédiaires ou directement associées à des *Top Events*) qui délimitent le véritable domaine des états opérationnels, dégradés et dysfonctionnels du système.



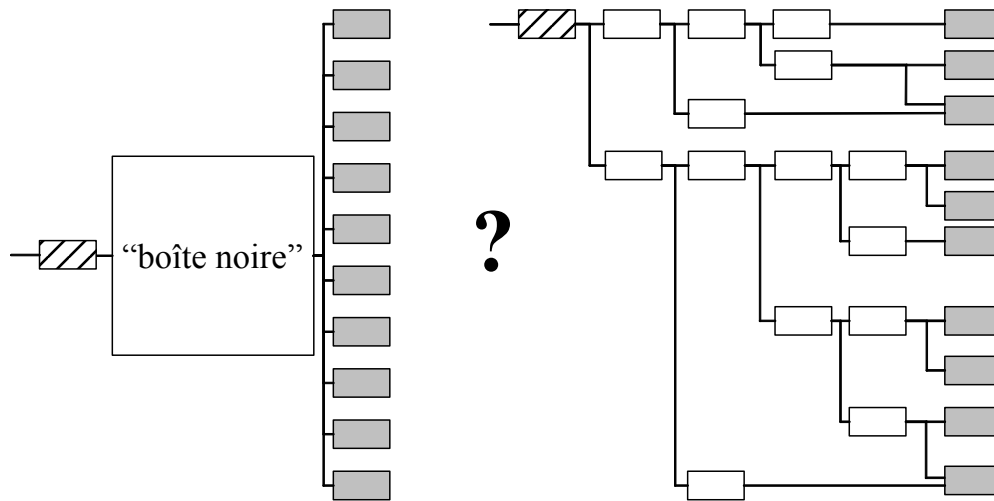


FIG. 5.6 – Fonction de transfert globale “boîte noire” ou décomposition en fonctions de transfert intermédiaires ?

### 5.3.1 Intérêts de la décomposition physique des scénarios

Dans un contexte prévisionnel où l’objectif principal consiste à déterminer un niveau de fiabilité, on peut s’interroger sur la légitimité d’une approche par la modélisation profitant de la décomposition des scénarios de défaillance au regard d’une approche similaire considérant l’ensemble des scénarios de défaillance comme une “boîte noire”. Cette interrogation est illustrée dans la figure 5.6 où :

- le schéma de gauche représente la “boîte noire” (fonction de transfert physique globale et compacte). Il lie directement un mode de défaillance aux paramètres élémentaires de conception.
- le schéma de droite représente la même fonction de transfert physique mais éclatée. Il fait, quant à lui, apparaître les différents chemins potentiels de défaillance et anticipe l’intégration de la modélisation du comportement physique du système en chaque nœud de l’arbre.

Ces deux représentations permettent, à terme, l’évaluation d’un niveau de fiabilité. Si on se limite à la recherche de la probabilité d’occurrence d’un mode de défaillance, d’un *Top Event*, la décomposition n’apporte rien par rapport à l’utilisation d’une fonction de transfert globalisée. Au contraire, elle peut même avoir tendance à complexifier le problème inutilement. En revanche, l’exploitation de la décomposition, même si cela demande le développement de méthodes ou de procédures de calcul inédites (Chapitres 6 à 8), conduit nécessairement à l’obtention d’informations additionnelles sur le comportement du système, utiles pour l’élaboration de sa fiabilité.

**Scénarios représentés par une fonction de transfert globale**

L'analyse mécano-fiabiliste classique [Lem05b] d'un tel modèle quantitatif renvoie les résultats majeurs suivants :

1. l'estimation d'une probabilité de défaillance (ou probabilité d'occurrence du *Top Event*) et d'un indice de fiabilité,
2. l'évaluation de la contribution des paramètres d'entrée à la réalisation de la réponse physique du système mécanique, aux modes de défaillance,
3. l'évaluation de la sensibilité des mesures de fiabilité à ces mêmes paramètres et à leur variabilité,
4. l'approximation (éventuellement) de la distribution de la réponse du système mécanique en fonction des incertitudes impactant la caractérisation et la modélisation des paramètres d'entrée.

**Décomposition des scénarios par fonctions de transfert élémentaires**

**Produits supplémentaires.** Outre des produits équivalents à ceux obtenus avec une approche par fonction de transfert globale, l'analyse mécano-fiabiliste d'une modélisation plus fine des scénarios de défaillance, vise également à fournir les résultats suivants (Chapitre 8) :

1. l'estimation d'une probabilité de défaillance et d'un indice de fiabilité pour chaque nœud intermédiaire caractéristique d'un comportement particulier du système ou de l'un de ses composants (probabilité d'occurrence d'événements intermédiaires traduisant leur fonctionnement normal, dégradé ou défaillant),
2. l'évaluation de la contribution de chaque phénomène et paramètre physique intermédiaire à la réalisation des modes de défaillance (*Top Events*) et des événements intermédiaires,
3. l'évaluation de la sensibilité des mesures de fiabilité aux paramètres intermédiaires et à leur variabilité (quelle que soit la fonction de performance analysée, qu'elle soit globale ou intermédiaire),
4. l'approximation du comportement stochastique de l'ensemble des paramètres des scénarios de défaillance en fonction des modèles probabilistes des paramètres élémentaires de conception,
5. la détermination de la contribution à la fiabilité du système, des paramètres élémentaires de conception à travers chacune des branches (c'est-à-dire des scénarios) dans lesquelles ils interviennent,
6. l'estimation des corrélations entre événements intermédiaires (traduisant des états de performance dégradée du système) et *Top Events*, et l'évaluation de probabilités conditionnelles d'occurrence des *Top Events*.

**Exploitation dans le cadre d'un processus de conception fiable.** Les apports potentiels de ces résultats et de leur exploitation dans le cadre d'un processus de conception fiable sont multiples :

1. Ils informent les différents acteurs de la conception mécanique, non seulement sur le respect ou non des critères de conception métiers et des attendus de fiabilité, mais également sur la marge (positive ou négative) existant entre les estimations réalisées et les objectifs.
2. Ils renseignent les concepteurs sur les sensibilités de la fiabilité du système et de ses composants aux paramètres élémentaires de conception ainsi qu'aux paramètres et phénomènes physiques intermédiaires. Celles-ci constituent des arguments indispensables en vue de l'optimisation de la conception pour et par la fiabilité. Autrement dit, elles identifient les leviers de conception disponibles pour assurer le développement d'un système respectant les objectifs de fiabilité qui lui ont été préalablement imposés.
3. Ils exhibent les paramètres, élémentaires ou intermédiaires, les plus sensibles aux comportements mécaniques et aux variations potentielles des paramètres de conception. De nouveau, ceci constitue des informations importantes en vue des choix de conception.
4. Ils participent à la construction d'un retour d'expérience numérique très précieux (réalisations de phénomènes physiques pour des configurations particulières des paramètres de conception, probabilités conditionnelles d'occurrence de phénomènes physiques, probabilités conditionnelles de défaillance). Par exemple, on peut envisager d'exploiter ce retour d'expérience, dans le cadre d'analyses encore plus globales de fiabilité, pour renseigner des modèles de fiabilité systèmes de type réseaux Bayésiens et participer à leur apprentissage.

La décomposition phénoménologique des scénarios de défaillance et leur interprétation mécano-fiabiliste sont donc prédisposées à favoriser les synergies entre le métier de la fiabilité et les métiers de la conception. Il est donc naturel de chercher à les exploiter à des fins d'optimisation, pour et par la fiabilité, du processus de développement de systèmes mécaniques.

**Capacité de mise à jour en fonction de la connaissance disponible.** Si la décomposition ou l'éclatement du modèle permettent d'obtenir des informations supplémentaires susceptibles de participer à la définition d'arguments de conception fiable, ils favorisent également l'exploitation de l'ensemble de la connaissance disponible à des fins de construction, d'amélioration et de validation du modèle de calcul de fiabilité. Illustrons succinctement ces deux idées :

1. Nous nous plaçons d'abord dans le contexte où le niveau de fiabilité du système étudié n'est pas satisfaisant. Il est donc indispensable de définir une ou plusieurs actions de modification de conception visant à assurer cette fois que le niveau de fiabilité du système atteint bien l'objectif requis. Dans le cadre de certaines applications et de certains scénarios de défaillance, la meilleure stratégie ne consiste pas forcément à agir au niveau des paramètres élémentaires de conception. Ceci est en particulier vrai dans le cas de systèmes tels que les moteurs d'automobile où le comportement résulte d'interactions complexes entre composants mécaniques, stratégie de contrôle moteur,... Il peut très bien être plus judicieux (pour des raisons d'efficacité, de faisabilité ou tout simplement de

coût de conception) de jouer sur un paramètre intermédiaire en s’assurant par exemple de son contrôle et de sa régulation au moyen d’un système extérieur. Dans ce cas, il est indispensable de connaître son rôle et son poids dans la fiabilité du système et une approche de type “boîte noire” ne le permet pas.

2. Nous considérons maintenant la problématique de mise à jour du modèle d’évaluation de la fiabilité et de son exploitation au fur et à mesure que de nouvelles informations sont disponibles. Il apparaît clairement la supériorité de la version éclatée du modèle de fiabilité sur la version “boîte noire”. En cours de conception, le retour d’expérience, les différentes campagnes d’essais et la meilleure compréhension des phénomènes physiques jusqu’alors imparfaitement maîtrisés, mettent à disposition des fiabilistes et des mécaniciens de nouvelles informations sur les divers éléments des scénarios de défaillance. Celles-ci ne concernent que très rarement les paramètres élémentaires de conception mais permettent plus souvent d’affiner la connaissance de paramètres ou de phénomènes physiques intermédiaires. Un modèle de fiabilité de type “boîte noire” et global ne peut malheureusement pas intégrer l’ensemble de cette connaissance. En revanche, le modèle décomposé en est tout à fait capable.

## Conclusion

Ces considérations sont autant d’arguments qui justifient l’intérêt et la nécessité d’une décomposition système des scénarios de défaillance et de leur modélisation physique pour l’élaboration et la validation de la fiabilité prévisionnelle de systèmes mécaniques. Nous précisons que l’intérêt pour ce type de raisonnement semble être très récent. A notre connaissance seuls Mahadevan *et al.* [MR05, MZS01] ont jusqu’à présent adopté une démarche similaire de décomposition de modèle physique de fiabilité reposant, toutefois, sur un formalisme de réseau Bayésien. Cependant, ils l’exploitent essentiellement dans le cadre de la validation des modèles d’estimation de la fiabilité. Ils n’en tirent véritablement avantage ni pour leur construction ni pour l’élaboration de la fiabilité de systèmes mécaniques au cours de leur processus industriel de conception. De plus, de notre point de vue, l’utilisation des réseaux Bayésiens limite actuellement les possibilités de modélisation fine de la physique de défaillance. Ils ne permettent pas, entre autres, de gérer des relations nodales qui seraient données sous la forme d’un code implicite de type éléments finis par exemple.

La décomposition phénoménologique des scénarios de défaillance que nous proposons en vue d’un traitement mécano-fiabiliste présente donc une originalité certaine.

### 5.3.2 Grammaire de décomposition - critères de granularité

Toute la difficulté consiste, maintenant, à assurer le développement d'une représentation quantitative appropriée des scénarios de défaillance phénoménologiques à partir de la donnée des modèles qualitatifs exhaustifs discutés précédemment. Dans la pratique, celui-ci fait inévitablement l'objet d'un certain nombre de compromis issus des discussions entre les fiabilistes (modélisation du problème de fiabilité), les mécaniciens et les experts de la physique (modélisation des phénomènes physiques), les statisticiens (analyse des données, modélisation des données) et le décideur.

Il faut bien garder à l'esprit que les caractéristiques structurelles de la décomposition quantitative des scénarios de défaillance phénoménologiques doivent permettre son couplage optimal avec un moteur de calcul fiabiliste adapté (Chapitres 6 à 8). Tout en respectant les résultats fondamentaux de l'étude qualitative, son niveau de détail doit être déterminé, au juste nécessaire, par rapport aux objectifs de l'analyse de fiabilité et par rapport aux moyens de modélisation. La conservation du niveau correspondant aux modes de défaillance (*Top Events*) et du niveau élémentaire est indispensable. La structure intermédiaire peut, quant à elle, être simplifiée. Il s'agit alors de construire un modèle de fiabilité quantitatif équivalent, dépourvu d'artifices inutiles et dont l'évaluation :

1. garantit l'estimation d'un niveau de fiabilité, en fonction de la connaissance disponible à une étape donnée du processus de conception,
2. maximise l'obtention d'informations utiles et exploitables pour l'aide à la conception et au dimensionnement quelle que soit l'information disponible a priori.

On propose, ici, une ébauche de grammaire visant à automatiser la définition d'une telle structure. Elle prend la forme d'une *checklist* et s'applique à trois niveaux : pour l'identification des paramètres de conception élémentaires, pour la sélection des paramètres et des phénomènes intermédiaires qu'il est indispensable de faire apparaître explicitement dans le modèle quantitatif et pour l'anticipation des problèmes ultérieurs liés à la modélisation des paramètres et des phénomènes physiques.

#### Règles d'identification des paramètres élémentaires

- Les paramètres de base résultant de l'étude de défaillance qualitative sont en principe repris tels quels. Généralement, les paramètres élémentaires correspondent à des paramètres de conception et de dimensionnement des systèmes mécaniques étudiés.
- Il faut simplement s'assurer qu'ils ne relèvent pas de considérations trop "microscopiques" sur les propriétés ou les phénomènes qu'ils caractérisent.

Par exemple, supposons que l'analyse qualitative identifie comme paramètre de base une caractéristique matériau telle qu'un module d'Young. Dans ce cas, il doit figurer au niveau élémentaire du modèle quantitatif. En revanche, dans le cas où la décomposition qualitative se poursuit en faisant référence aux propriétés de cristallographie du matériau, il est préférable de conserver le module d'Young comme paramètre de base du modèle quantitatif.

**Critères de sélection des paramètres intermédiaires pertinents**

- Les paramètres intermédiaires, dont on sait qu’une information sur leur variabilité ou sur leur rôle dans les scénarios de défaillance peut bénéficier aux concepteurs ou aux décideurs, sont conservés. Ils doivent absolument figurer dans le modèle quantitatif final.
- Les paramètres intermédiaires, que l’on est en mesure de contrôler et de modifier, si nécessaire, au cours du fonctionnement du système (au sens de la régulation ou de la maîtrise du paramètre au cours du fonctionnement du système), sont identifiés. Ces paramètres doivent figurer dans le modèle final.
- Les paramètres intermédiaires que l’on est en mesure de contrôler ou de mesurer (au sens de l’observation de l’évolution du paramètre au cours du fonctionnement du système) sont repérés. Ils peuvent figurer dans le modèle final.
- Les paramètres intermédiaires, qui n’apportent aucune information supplémentaire s’ils sont conservés dans le modèle de fiabilité quantitatif, en sont exclus. Ces paramètres peuvent être intégrés à des modèles physiques regroupant plusieurs nœuds intermédiaires, dans la mesure où la modélisation le permet. Ils interviennent ainsi de manière “cachée” dans l’évaluation du modèle de fiabilité qualitatif. D’une part, ceci a pour intérêt de simplifier le calcul. D’autre part, nous nous focalisons sur l’obtention d’informations cruciales sur les paramètres et les phénomènes pour lesquels il est envisageable d’agir de manière corrective pour l’amélioration de la conception.

**Règles d’anticipation des problèmes liés à la modélisation**

- L’ensemble de l’information disponible sur les paramètres des niveaux élémentaires et intermédiaires doit être identifié et agrégé afin d’avoir une première idée des incertitudes liées à leur caractérisation. Dans le cas où cette information serait insuffisante, il est d’ores et déjà nécessaire de dégager les moyens à mettre en œuvre pour la compléter (définition de campagnes d’essais, analyse du retour d’expérience ou recours aux avis d’experts,...).
- Les phénomènes physiques nodaux pour lesquels on dispose déjà de modèles de comportement sont identifiés. Dans la mesure du possible et de la représentativité des modèles, il est toujours préférable de travailler d’abord avec les modèles les plus simples. Il se peut aussi qu’il existe déjà des modèles de comportement intégrant plusieurs nœuds (paramètres ou phénomènes) décrits dans le modèle qualitatif. Ils peuvent bien entendu être utilisés dans la mesure où l’on ne juge pas intéressant d’avoir un supplément d’information les concernant.
- Les phénomènes physiques pour lesquels on ne dispose pas, à l’heure actuelle, de modèles de comportement sont également recensés. Les moyens à mettre en œuvre pour leur modélisation et sa validation sont explicités (choix du type de modèle, définition d’axes métier, définition de campagnes d’essais, analyse du retour d’expérience ou recours aux avis d’experts,...). Les phénomènes physiques, qui peuvent faire l’objet d’un rassemblement en vue d’une modélisation unique plus globale, sont regroupés ; pour autant que cela ne complexifie pas le calcul qui en découle et que cela reste compatible avec les critères précédents.

- Les moyens de calcul à mettre en œuvre pour l'évaluation du modèle global font l'objet d'une première évaluation. Ils sont comparés aux moyens et au temps effectivement disponibles au moment de la phase conception à laquelle on se situe.

L'application systématique de ces règles génériques facilite le passage, d'une représentation qualitative exhaustive des scénarios de défaillance phénoménologiques, à la structure de modèles quantitatifs exploitables pour l'estimation de mesures de fiabilité. Il s'agit là d'une première liste de critères qui peut être complétée ou améliorée pour définir plus finement la grammaire de décomposition.

### 5.3.3 Définition formelle

Nous disposons, à présent, de la structure de scénarios de défaillance phénoménologiques quantitatifs. Afin de préparer leur évaluation au moyen de techniques adaptées, il est nécessaire de leur conférer une dimension beaucoup plus formelle et mathématique. Nous proposons d'exploiter un formalisme constitué essentiellement de niveaux et de nœuds. Sur cette base, nous venons greffer des fonctions de performance ou des fonctions d'état limite caractérisant les différentes configurations fonctionnelles et dysfonctionnelles du système considéré.

#### Niveau élémentaire 0

Au niveau le plus élémentaire se situent les paramètres de conception ou les paramètres de base du modèle quantitatif. Nous rappelons que ce sont les variables pour lesquelles le concepteur ne juge pas nécessaire d'aller rechercher une information supplémentaire en fonction de leur origine physique. Par exemple, un paramètre tel que la tension de pose des vis de culasse d'un moteur d'automobile (impactant l'étanchéité aux gaz au niveau du joint de culasse) peut être considéré comme une variable de base mais il pourrait également être considéré comme la variable résultant de la combinaison de divers facteurs intervenant au niveau de la gamme du process de serrage. On note  $\mathbf{X}^{(0)}$  le vecteur de ces variables en nombre  $n_0$ .

#### Niveau 1

Le niveau 1 est constitué des variables du niveau 0 auxquelles s'ajoutent les variables engendrées par le passage du niveau 0 au niveau 1. Notons  $N_{c1}$  le nombre de variables  $S_{k'}^{(1)}$ ,  $k' = 1, \dots, N_{c1}$  ainsi créées. Chaque variable  $S_{k'}^{(1)}$  résulte d'une transformation nodale  $M_k^{(1)}$ ,  $k = k' + nva_0$  :

$$\mathbf{X}^{(0)} \longrightarrow \check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(0)} \longrightarrow S_{k'}^{(1)} = M_k^{(1)} \left( \check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(0)} \right) \quad (5.1)$$

où  $\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(0)}$  est le vecteur de variables d'entrée de la transformation  $M_k^{(1)}$  construit à partir du vecteur  $\mathbf{X}^{(0)}$ . Le tableau 5.1 illustre le passage du niveau 0 au niveau 1.

Niveau 0	Transformation physique	Niveau 1
$\check{\mathbf{X}}_{1,1}^{(0)}$	$M_1^{(1)}$	$X_1^{(0)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\check{\mathbf{X}}_{nva_0,1}^{(0)}$	$M_{nva_0}^{(1)}$	$X_{nva_0}^{(0)}$
$\check{\mathbf{X}}_{nva_0,1}^{(0)}$	$M_{nva_0+1}^{(1)}$	$S_{nva_0+1}^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\check{\mathbf{X}}_{nva_0+N_{c1},1}^{(0)}$	$M_{nva_0+N_{c1}}^{(1)}$	$S_{nva_0+N_{c1}}^{(1)}$

$$\mathbf{X}^{(0)}|_{nva_0} \quad \mathbf{M}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} \{Id\}_{nva_0} \\ \mathbf{M}^{(1)}|_{k=nva_0+1}^{nva_0+N_{c1}} \end{array} \right\} \quad \mathbf{X}^{(1)}|_{n_1} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(0)} \\ \mathbf{S}^{(1)} \end{array} \right\}_{nva_1=nva_0+N_{c1}}$$

TAB. 5.1 – Passage du niveau (0) au niveau (1).

Au niveau 1, nous disposons alors d'un vecteur de paramètre  $\mathbf{X}^{(1)}$  défini par :

$$\mathbf{X}^{(0)}|_{nva_0} \xrightarrow{M_k^{(1)}, k=1, \dots, nva_1} \mathbf{X}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(0)}|_{nva_0} \\ \mathbf{S}^{(1)}|_{N_{c1}} \end{array} \right\}_{nva_1} \quad (5.2)$$

### Niveau $l$

D'une manière générale, la procédure conduit à l'obtention des variables du vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$  de niveau  $l$  en nombre  $n_l = n_0 + \sum_{j=1}^l N_{c_j}$ . Le niveau terminal  $TE$  renferme les paramètres correspondant aux *Top Events*.

Les tableaux 5.2 et 5.3 illustrent respectivement le passage du niveau 1 au niveau 2 et la généralisation du passage du niveau  $l$  au niveau  $l+1$ .

### Fonctions de performance et fonctions d'état limite

Des fonctions de performances ou d'état limite peuvent être définies en n'importe quel nœud intermédiaire ou terminal par la donnée d'un opérateur  $G_k^{(l)}$  :

$$G_k^{(l)} = M_k^{(l)} \left( \check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)} \right) - \gamma_k^{(l)} = X_k^{(l)} - \gamma_k^{(l)}; k = 1, \dots, nva_l; l = 0, \dots, TE \quad (5.3)$$

où  $\gamma_k^{(l)}$  est une valeur seuil pouvant être égale à 0. Ces opérateurs mathématiques  $G_k^{(l)}$  sont définis à partir de règles métiers de conception, de politiques techniques de dimensionnement ou encore de critères de contrôle, et bien sûr, de la connaissance des mécanismes physiques de défaillance. Par exemple, si l'on considère l'exemple conducteur introduit dans le chapitre 3 et illustré en figure 3.4 :

- Un état limite de contrôle peut permettre de mesurer la propension de la pression de combustion, dans des conditions extrêmes, à dépasser un seuil limite fixé par les concepteurs.



Niveau 1	Transformation physique	Niveau 2
$\check{\mathbf{X}}_{1,2}^{(1)}$	$M_1^{(2)}$	$X_1^{(1)} = X_1^{(0)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\check{\mathbf{X}}_{1,2}^{(1)}$	$M_{nva_0}^{(2)}$	$X_{nva_0}^{(1)} = X_{nva_0}^{(0)}$
$\check{\mathbf{X}}_{1,2}^{(1)}$	$M_{nva_0+1}^{(2)}$	$X_{nva_0+1}^{(1)} = S_{nva_0+1}^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\check{\mathbf{X}}_{1,2}^{(1)}$	$M_{nva_0+Nc_1}^{(2)}$	$X_{nva_1=nva_0+Nc_1}^{(1)} = S_{nva_1}^{(1)}$
$\check{\mathbf{X}}_{1,2}^{(1)}$	$M_{nva_1+1}^{(2)}$	$S_{nva_1+1}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\check{\mathbf{X}}_{1,2}^{(1)}$	$M_{nva_1+Nc_2}^{(2)}$	$S_{nva_2=nva_1+Nc_2}^{(2)}$
<hr/>		
$\mathbf{X}^{(1)} _{nva_1=nva_0+Nc_1}$	$\mathbf{M}^{(2)}$	$\mathbf{X}^{(2)} _{n_2} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{S}^{(2)} \end{array} \right\}_{nva_2}$ $= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(0)} \\ \mathbf{S}^{(1)} \\ \mathbf{S}^{(2)} \end{array} \right\}_{nva_2}$

TAB. 5.2 – Passage du niveau (1) au niveau (2).

- Une fonction d'état limite peut, quant à elle, aider à la caractérisation des configurations défaillantes de l'assemblage culasse/joint de culasse/carter-cylindres de l'étanchéité aux gaz qu'il doit assurer au niveau du joint de culasse.

Les réalisations négatives ou nulles de  $G_k^{(l)}$  ( $G_k^{(l)} \leq 0$ ) définissent un domaine de défaillance ou de performance dégradée  $\mathcal{D}_{f_k}^{(l)}$  du système. Les réalisations positives de  $G_k^{(l)}$  ( $G_k^{(l)} > 0$ ) définissent un domaine de sûreté ou de performance acceptable  $\mathcal{D}_{s_k}^{(l)}$ . Par la suite, les performances et la fiabilité du système sont mesurées par rapport à ces fonctions de performance et d'état limite, et en fonction de la capacité du système à opérer dans des domaines de sûreté avec des niveaux de performance acceptables.

A ce stade, il semble intéressant de repérer l'analogie entre les fonctions d'état limite ou de performance que nous venons de définir et les fonctions de structure définies dans le cadre d'interprétations systèmes sans physique de la fiabilité (Chapitre 4 section 4.4). En effet, une fonction  $G_k^{(l)}$  peut être vue comme une fonction de structure logique et physique du système considéré vis-à-vis de la performance analysée.

Cette procédure assure la définition formelle de la structure des scénarios de défaillance. Chaque nœud  $M_k^{(l)}$  consiste en une entité à la fois logique et physique modélisant un aspect particulier du comportement du système mécanique étudié. Un tel formalisme, *système et physique*, des scénarios de défaillance généralise les approches physiques classiques de la fiabilité mécanique qui examinent essentiellement les différents modes de défaillance de manière ponctuelle et généralement de façon isolée.

Niveau $l$	Transformation physique	Niveau $l + 1$
$\mathbf{X}^{(l)} _{nva_l}$	$\mathbf{M}^{(l+1)}$	$\mathbf{X}^{(l+1)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(0)} \\ \mathbf{S}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{S}^{(l)} \\ \mathbf{S}^{(l+1)} \end{array} \right\}_{nva_{l+1}=nva_l+Nc_{l+1}}$ <hr/> $= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}^{(l)} \\ \mathbf{S}^{(l+1)} \end{array} \right\}_{nva_{l+1}}$

TAB. 5.3 – Passage du niveau  $(l)$  au niveau  $(l + 1)$ .

**Remarque :** Les modélisations mathématiques des transformations physiques  $M_k^{(l)}$ , tout comme celles des paramètres élémentaires  $\mathbf{X}^{(1)}$ , ne sont pas abordées dans ce chapitre. En revanche, le chapitre 6 leur est entièrement consacré.

## 5.4 Exemple : fuite de gaz au joint de culasse

Nous examinons le problème spécifique de l'étanchéité aux gaz au niveau d'un joint de culasse que nous avons introduit dans le chapitre 3 comme l'une des composantes de notre exemple conducteur. Pour des raisons évidentes de concision, nous ne présentons ni tous les détails de la construction des scénarios de défaillance potentiels relatifs à cette étanchéité, ni l'ensemble de ses produits. Nous donnons seulement les éléments fondamentaux assurant la lecture et la compréhension de la structure des scénarios de défaillance que nous obtenons et que nous illustrons de manière simplifiée grâce aux figures 5.7, 5.8 et 5.9.

### 5.4.1 Définition du périmètre matériel de l'étude

#### Technologie et rôle du joint de culasse

Le joint de culasse, interface entre la culasse et le carter-cylindres, assure l'étanchéité à l'eau, aux descentes d'huile, au *blow-by*<sup>1</sup>, aux circuits de montée d'huile ainsi qu'aux gaz de combustion. Cette étanchéité est à la fois interne (étanchéité inter-circuits) et externe (étanchéité vis-à-vis de l'extérieur du moteur). Le joint considéré est constitué de deux tôles métalliques actives, d'un stopper évolutif fixé par soudure laser continue sur une tôle support. Il possède également un revêtement d'élastomère spécifique de 4 à 5  $\mu\text{m}$  d'épaisseur :

- aux inter-tôles dont le rôle est d'éviter le passage des gaz entre les tôles,
- sur l'extérieur des tôles pour absorber les défauts d'états de surface de la culasse et du carter-cylindres.

Les différentes feuilles constitutives du joint sont maintenues par des rivets.

<sup>1</sup>Passage de carburant non brûlé et de gaz au niveau de la segmentation du piston de la chambre de combustion vers le carter d'huile aboutissant à la dilution de l'huile et à la contamination du circuit de lubrification.

Dans le cas de cet exemple simplifié, on se limite à l'étude des phénomènes responsables d'une perte d'étanchéité aux gaz. L'arbre de défaillance associé n'est pas donné dans son intégralité pour des raisons de confidentialité : il est issu d'une analyse réalisée dans le cadre de l'activité de fiabilité prévisionnelle du Service de Sécurité de Fonctionnement de la Direction de la Mécanique Renault.

### Identification des sollicitations s'exerçant sur le joint de culasse

Les sollicitations exercées sur le joint de culasse sont de trois types :

1. Le système est sollicité mécaniquement par :
  - la pression de combustion qui tend à ouvrir l'assemblage (culasse / joint / carter-cylindres), et la pression de serrage dans les vis de culasse qui elle tend à plaquer les trois interfaces et assurer l'étanchéité (en fait, la sollicitation de la pression des gaz est un phénomène cyclique – cycle de combustion moteur – qui entraîne une fatigue des éléments d'étanchéité du joint – les nervures, les feuilles et le stoppeur) ;
  - la pression d'huile dans les circuits de remontée et de descente ;
  - la pression d'eau du circuit de refroidissement culasse.
2. Le système est sollicité, d'un point de vue thermique, par les gaz de combustion dans les cylindres qui entraînent des déformations différentielles entre le carter-cylindres, la culasse et le joint. Les conduits de remontée de *blow-by* participent également aux sollicitations thermiques du joint.
3. Enfin le système est sollicité par des phénomènes de vibration. Couplé au phénomène de thermique différentielle, la sollicitation est susceptible d'entraîner du fretting (corrosion de contact) sur le joint.

A chaud la face culasse s'écarte de la face du carter-cylindres. La réserve élastique emmagasinée par la cabosse gaz du joint doit permettre de compenser ces déplacements et d'assurer un contact permanent, c'est-à-dire l'étanchéité aux gaz, entre la culasse et le carter-cylindres. Dans les trois cas les sollicitations se traduisent par des débattements relatifs entre les trois interfaces, susceptibles de provoquer une perte de pression de contact sur les zones d'étanchéité ainsi que des chemins de fuite.

#### 5.4.2 Éléments de construction des scénarios de défaillance physiques qualitatifs

En supposant que l'ensemble des phénomènes responsables d'une perte d'étanchéité aux gaz ont d'abord été identifiés, deux scénarios de défaillance principaux expliquent cette perte d'étanchéité. La première possibilité de fuite de gaz peut être due à l'existence d'un chemin de fuite initial entre le carter-cylindres et la culasse lié principalement à :

- des défauts d'état de surface sur les différentes faces en contact (dus à la présence de corps étrangers, par exemple),
- une grande différence de hauteur de stoppeur entre l'interfût et le reste du fût.

La seconde possibilité de défaillance est la création d'un chemin de fuite sous sollicitations en fonctionnement lié à :

- une déformation trop importante de la culasse ou du carter-cylindres. Celle-ci provient d’une raideur insuffisante, des efforts de montage et de fonctionnement ou d’une tension de serrage inadaptée.
- un manque de pression dans le joint ou un déséquilibre de pression entre nervures d’étanchéité fluide et nervures d’étanchéité gaz, au profit des nervures fluides.
- une fissuration des nervures gaz ou des feuilles, causée par un phénomène de fatigue.
- des caractéristiques (de forme, de positionnement, de tenue mécanique) inadéquates du carter-cylindres.
- la tension insuffisante dans les vis de culasse, leur nombre et leur répartition.

Les scénarios de défaillance physiques qualitatifs sont donc construits en partant des mécanismes de défaillance pouvant être la cause directe de la fuite. La description séquentielle des phénomènes impliqués dans la défaillance est ensuite réalisée jusqu’à l’identification des phénomènes et des paramètres élémentaires de défaillance. Les critères d’arrêt des branches retenus sont :

- les spécifications géométriques des pièces en présence,
- les spécifications matérielles des pièces en présence,
- les caractéristiques d’entrée du système : efforts imposés, régime moteur,...
- les paramètres de fonctionnement : température, pression,...
- les paramètres process.

#### 5.4.3 Aperçu de la structure des scénarios de défaillance physiques quantitatifs

La structure des scénarios de défaillance physiques quantitatifs que nous obtenons dans le cadre de l’étude de l’étanchéité au gaz au niveau d’un joint de culasse est illustrée de manière simplifiée au moyen des figures 5.7, 5.8 et 5.9. L’événement sommet (*Top Event*) n’est autre que le mode de défaillance correspondant à un débit de fuite de gaz trop élevé. Nous lui associons une fonction de performance globale. La décomposition progresse ensuite jusqu’à l’identification séquentielle des paramètres de base (surlignés en gris sur les figures). Nous précisons que la pression de combustion, bien qu’elle ne corresponde pas à un paramètre de conception élémentaire, n’est pas plus explicitée ici (nous renvoyons le lecteur au chapitre 3, à la présentation générale de notre exemple conducteur et des phénomènes de combustion et de remplissage en  $O_2$  des cylindres). De multiples fonctions d’états limites et de performance peuvent être définies au fur et à mesure du processus d’interprétation de la physique de défaillance, selon les critères introduits précédemment dans ce chapitre (cadres verts). L’information sur la nature des modèles disponibles, idéalisant les comportements physiques identifiés en chaque nœud des scénarios de défaillance, est déjà indiquée.

Enfin, nous ajoutons d’ores et déjà que, dans le cadre de l’illustration des étapes suivantes de la méthodologie proposée, nous nous limitons volontairement à l’étude des scénarios associés aux critères intermédiaires de défaillance d’écrasement (débattement) du joint et de pression s’exerçant sur le joint. Ils sont représentés par les seules figures 5.8 et 5.9.

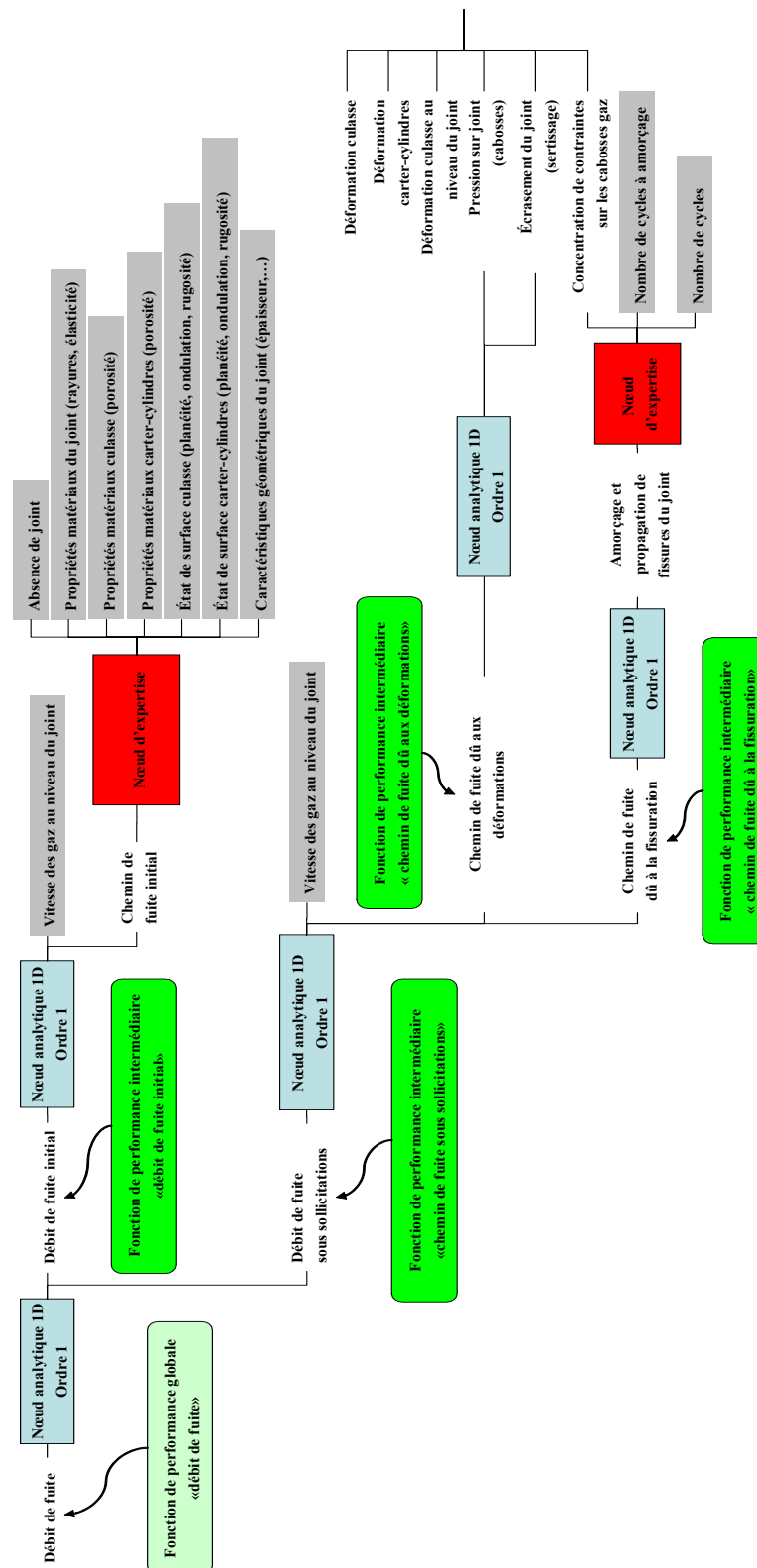


FIG. 5.7 – Fuite de gaz au joint de culasse : structure des scénarios physiques (1).

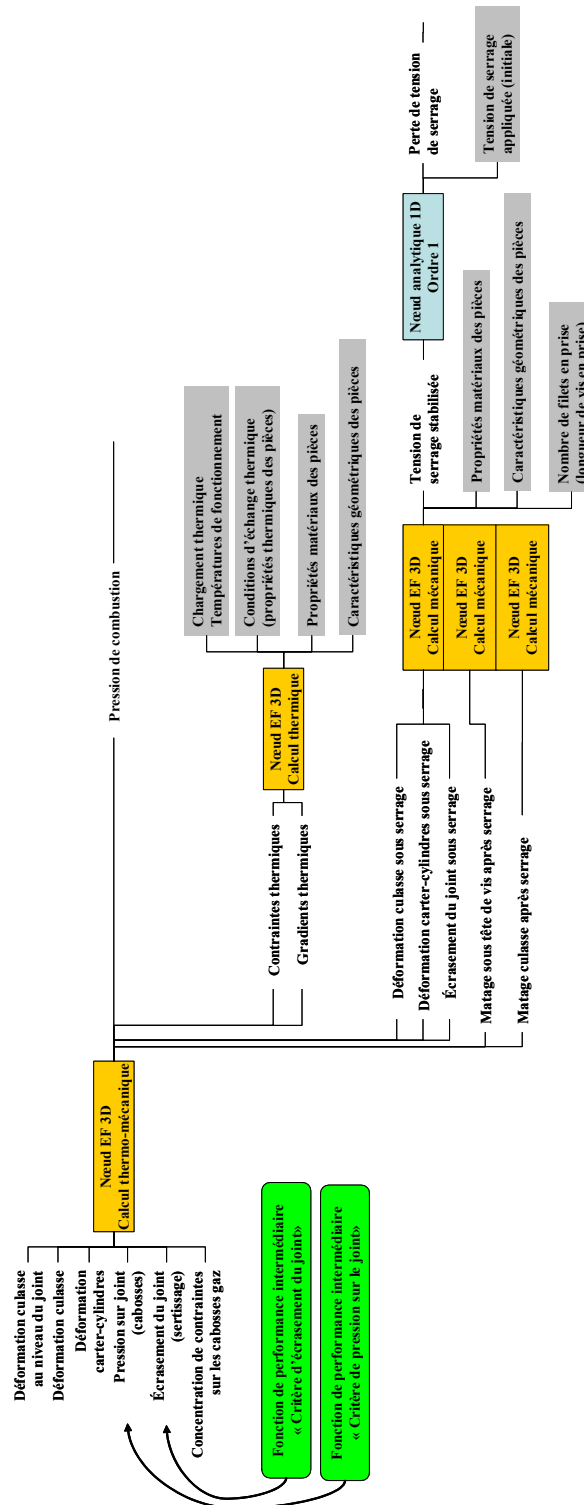


FIG. 5.8 – Fuite de gaz au joint de culasse : structure des scénarios physiques (2).

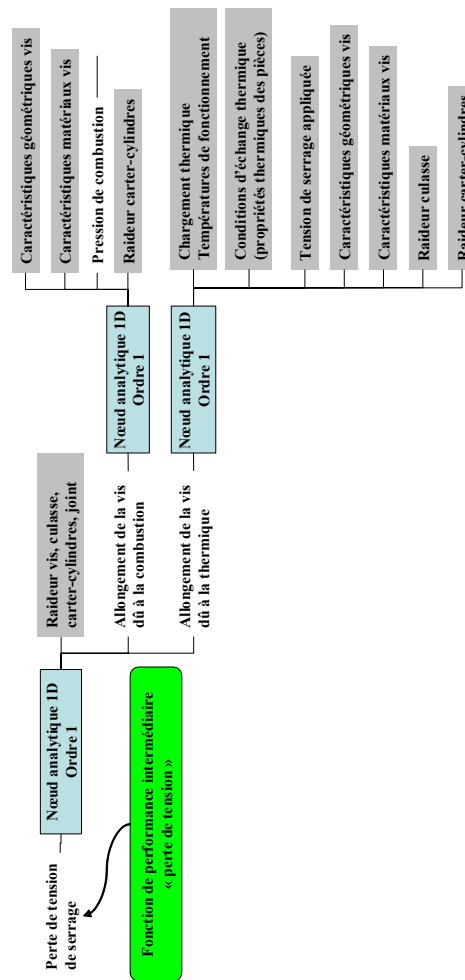


FIG. 5.9 – Fuite de gaz au joint de culasse : structure des scénarios physiques (3).

## 5.5 Conclusion du chapitre

### 5.5.1 Synthèse

A l'issue de ce chapitre, nous sommes en mesure de construire le cadre formel et la structure évolutive de scénarios phénoménologiques de défaillance quantitatifs à partir de la description qualitative arborescente des scénarios de défaillance d'un système mécanique.

Nous avons d'abord précisé les spécificités de la démarche d'analyse de défaillance qualitative et physique dont nous tirons profit. L'intérêt d'une approche par la décomposition à la fois physique et logique des scénarios de défaillance de systèmes mécaniques a alors été justifié. Nous avons ensuite identifié les bases d'une grammaire pour leur décomposition systématique. Avec la définition formelle des différents concepts et composantes de scénarios de défaillance phénoménologiques et systèmes, elles constituent les ingrédients indispensables à leur élaboration optimale.

Finalement, l'exemple de l'analyse d'une fuite de gaz potentielle au niveau du joint de culasse a permis de donner un aperçu (non exhaustif) de sa mise en œuvre et de sa valeur ajoutée.

### 5.5.2 Perspectives

Nous distinguons deux perspectives majeures concernant le processus d'élaboration de la structure de scénarios phénoménologiques que nous venons de proposer.

La première se situe au niveau de l'amélioration de la démarche exploitée au cours de la phase préliminaire d'analyse de défaillance qualitative et physique. Lorsque l'on travaille dans un domaine particulier (par exemple, la fiabilité prévisionnelle de systèmes mécaniques de l'automobile), nous pensons que celle-ci doit à la fois se baser sur, et intégrer, l'ensemble de la connaissance déjà disponible sur les défaillances potentielles et avérées. Il se pose donc le problème de la capitalisation et de la réexploitation des analyses de défaillance. Dans ce sens, nous avons participé, dans le cadre de réflexions connexes à nos travaux de recherche, au développement d'une première approche de capitalisation des analyses de défaillance sous la forme originale d'une base de données formalisée par un réseau qualitatif causal [RHPS06]. Sa mise à jour permanente ainsi que sa capacité d'interrogation lors de la réalisation de nouvelles analyses en assure l'efficacité et l'exhaustivité.

La deuxième voie de progrès consiste à poursuivre la définition de la grammaire de passage de la vision qualitative et système de la physique de défaillance à la structure d'un modèle voué à son interprétation quantitative. Nous avons essentiellement suggéré des règles empiriques, des règles de bon sens. Il en existe forcément d'autres. En outre, nous pensons qu'il est maintenant nécessaire de formaliser cette grammaire pour lui conférer un caractère plus universel, de sorte qu'elle constitue une base saine pour la poursuite de l'unification des approches fiabilistes suivant une formalisation à la fois *système et physique* des scénarios de défaillance. Autrement dit, il s'agit de réfléchir à la mise en place d'un métalangage [Ben91] dédié à la problématique d'unification des représentations *systèmes et physiques* de la fiabilité.



## Chapitre 6

# Modélisation des paramètres de conception et des comportements physiques

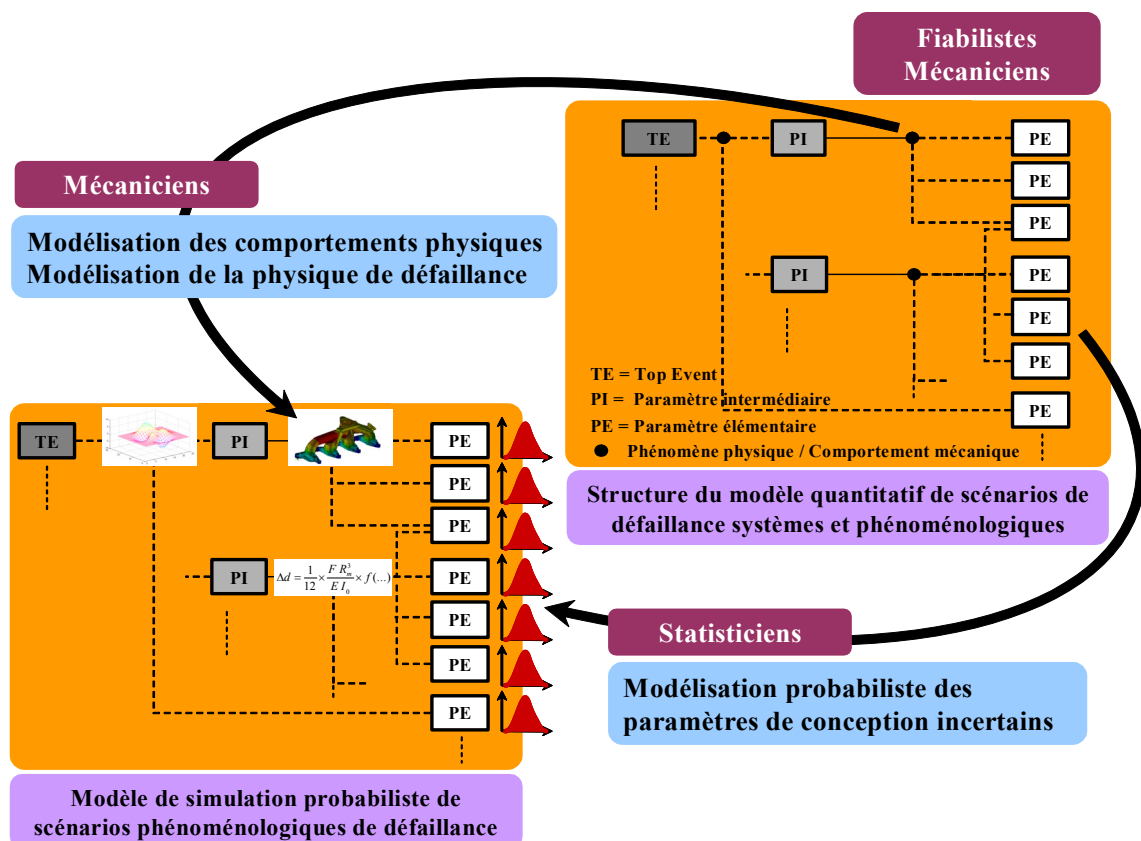


FIG. 6.1 – Modèle de simulation physique et probabiliste de scénarios de défaillance.

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous attachons à montrer comment intégrer aux représentations structurelles de scénarios phénoménologiques, les modèles numériques évolutifs :

- des incertitudes de caractérisation des paramètres élémentaires de conception ;
- du comportement et de la physique de défaillance des systèmes considérés.

Notre but est d'obtenir le modèle de simulation numérique probabiliste de scénarios de défaillance phénoménologiques (Fig. 6.1) le plus représentatif sachant l'expertise et l'information disponibles sur les données comme sur les comportements physiques, à une étape donnée du processus de conception.

Une représentation probabiliste des paramètres de conception est d'abord justifiée puis adoptée. Sa capacité de mise à jour par actualisation Bayésienne de la connaissance disponible est exploitée. La modélisation des phénomènes physiques et des performances identifiés aux différents nœuds des scénarios profite, quant à elle, des techniques de métamodélisation. Sa précision est adaptée en fonction de la connaissance et du niveau d'exigence des réponses attendues.

## 6.2 Modèles probabilistes des paramètres de conception

L'activité de conception de systèmes mécaniques s'inscrit dans un contexte incertain qu'il est nécessaire de maîtriser dès lors que l'on se fixe des objectifs de fiabilité ou de robustesse (*i.e.* de la capacité du système à maintenir ses performances, malgré des changements dans les conditions d'utilisation ou la présence d'incertitudes liées à ses paramètres ou à ses composants). Cette incertitude est inhérente à la caractérisation des paramètres de conception : l'environnement dans lequel les systèmes sont appelés à évoluer comme leur fabrication ne sont jamais parfaitement connus. La figure 6.2 illustre les principales sources de connaissance de ces paramètres de conception qui se succèdent au cours du processus de conception (décomposé de manière classique - Chapitre 4), et l'évolution de la représentativité des informations qui en émanent.

Dans la suite, nous introduisons d'abord les concepts d'incertitudes aléatoires et épistémiques. Nous justifions alors le choix d'une représentation probabiliste de l'incertain sur la base d'un rappel synthétique et d'une comparaison rapide des méthodes classiques communément utilisées pour sa modélisation : les intervalles (arithmétique

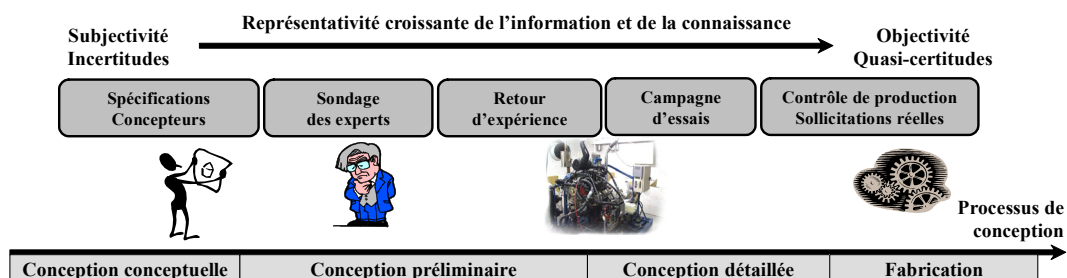


FIG. 6.2 – Evolution de la connaissance au cours du processus de conception.

des intervalles), les fonctions de densité de probabilité (théorie des probabilités) et les fonctions d'appartenance (logique floue, théorie de l'évidence et théorie possibiliste). Enfin, nous introduisons les principes fondamentaux de l'approche probabiliste retenue. Lorsque l'on dispose de données suffisamment riches et représentatives sur les paramètres de conception, elle exploite des techniques d'ajustement de lois de probabilité telles que des méthodes de maximum d'entropie, de régression ou de maximum de vraisemblance. Nous leur préférons une technique d'actualisation Bayésienne lorsque les données et la connaissance des paramètres de conception sont limitées mais peuvent potentiellement être complétées dès que de nouvelles sources de connaissance et de nouvelles informations sont disponibles.

La modélisation probabiliste de deux paramètres de conception, tirés de notre exemple conducteur (Chapitre 3), illustre nos propos : la tension de serrage des vis de culasse et le module d'Young de l'axe de piston.

### **6.2.1 Concepts d'incertitudes aléatoires et épistémiques**

Deux types d'incertitudes impactent l'activité de modélisation au cours du processus de conception de systèmes mécaniques ainsi que l'évaluation de leur fiabilité [OHS01] : les variabilités intrinsèques ou incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques ou résultant d'un manque de connaissance. Nous distinguons bien ici les incertitudes des erreurs de modélisation [ODR<sup>+</sup>02]. Les erreurs correspondent à des déficiences avérées au cours de l'activité de modélisation et de simulation et ne sont pas dues à un manque de connaissance ou à une variabilité imputable aux paramètres des systèmes considérés. Elles ne sont, en général, ni voulues ni véritablement maîtrisées. Dans la suite, nous ne focalisons notre attention que sur les incertitudes aléatoires et épistémiques.

#### **Incertitudes aléatoires**

Les incertitudes aléatoires couvrent les variations inhérentes à la nature même des paramètres ou des phénomènes considérés. De manière générale, ce type d'incertitude peut être décrit par une quantité distribuée, définie sur un intervalle de valeurs possibles. La quantité exacte se trouve à l'intérieur de cet intervalle mais elle ne peut pas se réduire à une unique valeur. Ces variabilités intrinsèques sont par exemple observées au niveau :

- des propriétés géométriques des systèmes mécaniques issues des process de fabrication (*e.g.* diamètre ou longueur d'un axe),
- des durées et des amplitudes de sollicitation dues à l'environnement (*e.g.* températures, profil de la chaussée),
- des propriétés de matériaux non uniformes (*e.g.* module d'Young).

Ces incertitudes aléatoires sont donc également dénommées incertitudes irréductibles dans la mesure où même si l'on dispose d'une connaissance complète du paramètre, celui-ci ne peut tout simplement pas être caractérisé de manière déterministe.

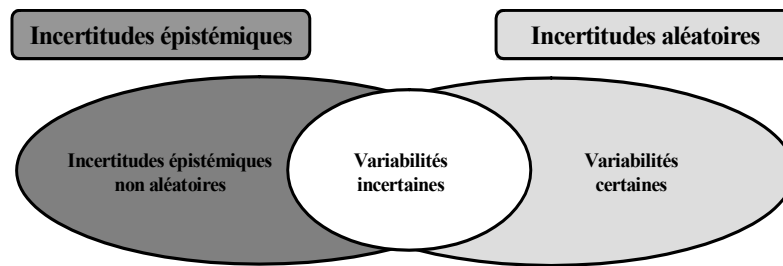


FIG. 6.3 – Classification des types d'incertitudes (d'après [MV05]).

### Incertitudes épistémiques

Les incertitudes épistémiques correspondent à une déficience potentielle de l'étape de modélisation résultant essentiellement d'un manque de connaissance ou d'une information incomplète sur les caractéristiques du système mécanique en cours de conception. Ce manque de connaissance, cette incomplétude de l'information entraîne la définition de modèles mathématiques qui idéalisent de manière inexacte les paramètres ou les phénomènes physiques. Ils se manifestent classiquement par [KF88] :

- leur manque de précision.
- leur non spécificité. Il existe plusieurs modèles différents pour décrire le même paramètre ou le même phénomène physique.
- leur dissonance. Elle est caractéristique du manque de cohérence de l'information qui a servi à leur construction.

Ces incertitudes épistémiques influencent par exemple :

- le choix d'une représentation spécifique parmi un certain nombre de modèles pour la caractérisation d'un paramètre particulier (dans le cadre d'une modélisation probabiliste : loi normale, loi lognormale, loi Beta,...),
- le choix, en fatigue des matériaux, d'un modèle de diagramme de Haigh (amplitude de contrainte - contrainte moyenne) plutôt qu'un autre (*e.g.* Gerber, Goodman ou Soderberg).

Ces incertitudes sont également appelées incertitudes réductibles ou subjectives. En particulier, elles peuvent être réduites en utilisant des modèles plus fins et/ou en collectant des données en nombre plus important et plus précises.

### Incertitudes non mutuellement exclusives

Les incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques ne sont pas mutuellement exclusives [MV05]. En effet, une quantité dont la variabilité intrinsèque ne fait pas de doute peut également faire l'objet d'un manque de connaissance supplémentaire : l'information dont on dispose ne couvre pas l'ensemble de son intervalle de variation ou bien la fréquence d'occurrence des valeurs de l'intervalle ne peut pas être déterminée à partir de la connaissance disponible. Par conséquent, les incertitudes qui la caractérisent sont à la fois aléatoires et épistémiques. Typiquement, toute dimension géométrique caractérisée par sa valeur nominale et son intervalle de tolérance, mais sans aucune autre spécification sur son process de fabrication, est sujette à ce type

d'incertitudes mixtes. Celles-ci sont dénommées : *variabilités incertaines*. Ainsi, par opposition :

- Les *variabilités certaines* font référence à des quantités impactées par des incertitudes aléatoires dont on connaît exactement l'intervalle de variation et la fréquence de chacune des valeurs de cet intervalle.
- Les *incertitudes épistémiques non aléatoires* désignent des quantités sujettes à des incertitudes épistémiques dont la variabilité intrinsèque ou son effet sur le système mécanique n'est pas significative. Par exemple, il peut s'agir de n'importe quel paramètre de conception déterministe (à la variabilité négligeable), dont la définition exacte n'est pas figée au cours des premières étapes de la conception et dont la définition est vouée à évoluer au cours des étapes suivantes.

De cette discussion, illustrée en figure 6.3, émane la classification générale des incertitudes que l'on doit prendre en compte au cours du processus de conception de systèmes mécaniques.

## 6.2.2 Justification d'une représentation probabiliste de l'incertain

### Introduction

Les intervalles (arithmétique des intervalles), les fonctions de densité de probabilité (théorie des probabilités) et les fonctions d'appartenance (logique floue et leur exploitation dans le cadre de la théorie possibiliste), sont autant de représentations classiques disponibles pour la modélisation des incertitudes relatives à la définition des paramètres physiques de conception [HJO04]. Historiquement, la théorie des probabilités est la première à avoir fourni une structure mathématique pour la représentation des incertitudes qu'elles soient épistémiques ou aléatoires. En fait, cela remonte même aux XVIe et XVIIe siècles, aux prémisses du développement formel des probabilités [Hac02] et aux travaux de Gerolamo Cardano, Blaise Pascal ou encore Jacques Bernoulli pour ne citer que les premiers théoriciens. Aujourd'hui, la sélection d'une approche plutôt qu'une autre, comme en atteste par exemple [San02, HO04], fait l'objet de nombreux débats entre les probabilistes fréquentistes, les probabilistes Bayésiens et les adeptes des théories de l'évidence et des possibilités.

Nous ne nous étendons volontairement pas sur les aspects théoriques des différentes approches. Nous nous attachons, avant tout, à préciser :

- leur aptitude à modéliser les différents types d'incertitudes,
- la pertinence de leur utilisation au cours des différentes étapes du processus de conception de systèmes mécaniques.

L'objectif principal de cette discussion est d'argumenter et de justifier le choix, dans le cadre de la problématique spécifique qui est la nôtre, d'une représentation probabiliste évolutive des incertitudes relatives à la caractérisation des paramètres élémentaires.

### Représentations mathématiques classiques des incertitudes

**Intervalles.** L'arithmétique des intervalles moderne [JKDW01] repose essentiellement sur les travaux de Moore [Moo66] à qui l'on doit entre autres l'introduction des vecteurs et des matrices d'intervalles ainsi que les premiers cas d'application non

triviaux. En arithmétique des intervalles, on ne manipule pas des nombres, qui approchent plus ou moins fidèlement une valeur, mais des intervalles contenant cette valeur (Fig. 6.4). L'objectif de l'arithmétique des intervalles est de fournir des résultats qui contiennent à coup sûr la valeur ou l'ensemble cherché. Les objets intervalles scalaires sont des sous-ensembles fermés connexes de  $\mathbb{R}$ . Ils sont généralement désignés par des caractères gras  $\mathbf{x}$ . Soient  $\underline{x}$  le minimum de  $\mathbf{x}$  et  $\overline{x}$  son maximum, ils sont généralement notés :

$$\mathbf{x} = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) (\underline{x} \leq x \leq \overline{x})\} \text{ ou } \mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \quad (6.1)$$

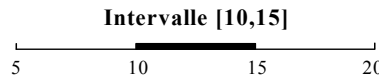


FIG. 6.4 – Exemple d'intervalle.

Cette définition montre donc simplement que le concept d'intervalle a la capacité de représenter des quantités non déterministes. Toutefois, nous soulignons d'ores et déjà deux des faiblesses majeures de l'arithmétique des intervalles, en particulier dans le cadre d'une utilisation pour l'évaluation de mesures de fiabilité. La première concerne les problèmes de surestimation inhérente à la nature même du calcul par intervalle (*i.e.* encadrement trop large, effet enveloppant des résultats) et de dépendance des résultats du calcul vis-à-vis de l'expression de la transformation utilisée. La seconde est relative à la complexité  $NP$ -difficile<sup>1</sup> du calcul menant à l'obtention du résultat le plus précis, c'est-à-dire le plus petit intervalle encadrant le résultat exact. Quoi qu'il en soit, l'arithmétique des intervalles est de plus en plus exploitée dans le cadre de simulations numériques du comportement de systèmes complexes, pour la prise en compte des incertitudes de caractérisation des paramètres de conception.

**Lois de probabilité et fonctions de densité de probabilité.** La théorie des probabilités [Sap90] consiste à associer à un événement  $E$  donné, un nombre positif compris entre 0 et 1 : sa probabilité d'occurrence. Classiquement l'observation d'un phénomène aléatoire est appelée épreuve. Toutes les réalisations possibles d'une épreuve forment l'ensemble de tous les résultats d'une expérience aléatoire, noté  $\Omega$ . Un événement  $E$  est, en fait, défini comme un sous-ensemble de  $\Omega$  contenant les réalisations  $\omega \in \Omega$ . On note  $P$  sa probabilité. L'ensemble de tous les événements possibles de  $\Omega$  ayant une probabilité ainsi définie forme une tribu de  $\Omega$ , notée  $\mathcal{F}$ . De manière plus formelle, on appelle donc probabilité : l'application  $P$  qui, à toute tribu  $\mathcal{F}$  de  $\Omega$  associe un élément de  $[0, 1]$ . Finalement, ces notions assurent la construction d'un espace de probabilités noté  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

<sup>1</sup>Définir de manière rigoureuse ce qu'est un problème  $NP$ -difficile demanderait beaucoup de définitions préalables. Le lecteur intéressé se rapportera à [GJ79]. Pour simplifier, disons que c'est un problème que l'on n'arrive généralement pas à résoudre en un temps "raisonnable" (dans l'état actuel des connaissances). Les problèmes  $NP$ -difficiles ont une complexité exponentielle alors que les "faciles" ont une complexité polynomiale.

Une variable aléatoire réelle  $X$  est une fonction de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle admet une fonction de répartition, notée  $F_X(x)$ , qui est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  définie par :

$$F_X(x) = P(X < x) \quad (6.2)$$

Elle admet une fonction de densité de probabilité, notée  $f_X(x)$ , si pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  on a :

$$P(I) = \int_I f_X(x) dx \quad (6.3)$$

La figure 6.5 illustre les fonctions de densité de quatre variables aléatoires suivant des lois usuelles : uniforme, exponentielle, bêta et Gaussienne (ou normale). Il est possible d'en définir de toute nature.

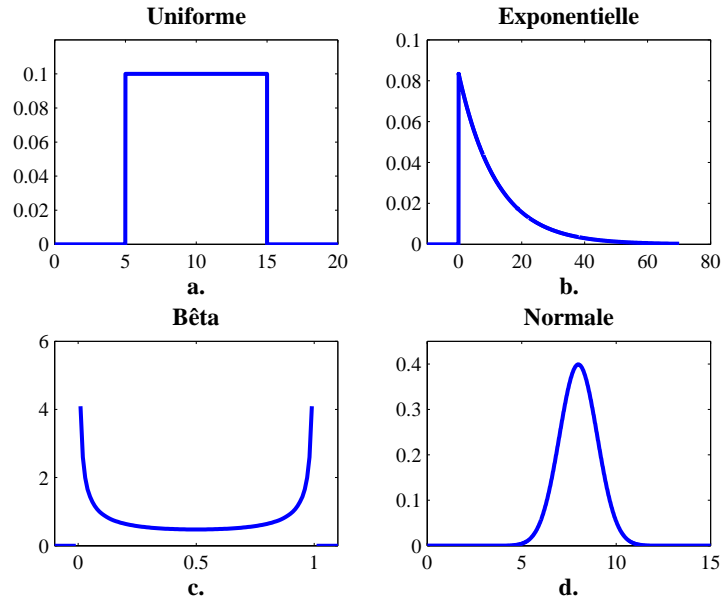


FIG. 6.5 – Exemples de fonctions de densité de probabilité.

Ce rappel des définitions des concepts de variable aléatoire et de fonction de densité de probabilité souligne leur prédisposition à représenter des quantités non déterministes.

**Fonction d'appartenance.** Le concept de fonction d'appartenance a été introduit dans le cadre de la logique floue dont les principes théoriques ont été initialement définis par Zadeh [Zad65] dans le courant des années 60. La logique floue a depuis été utilisée dans des domaines aussi variés que la gestion de la circulation routière (feux rouges), l'environnement (météorologie, sismologie,...), la médecine (aide au diagnostic), le génie civil et le génie mécanique (optimisation de structures en contexte incertain), et bien d'autres. En fait, elle peut s'interpréter comme une extension de la théorie des ensembles classiques assurant la prise en compte et le traitement d'ensembles définis

de façon imprécise, à partir d'une information incomplète. En effet, en introduisant le concept de fonction d'appartenance, la logique floue autorise effectivement la représentation d'une valeur qui appartient, avec un certain degré de compatibilité, à un ensemble donné. Ainsi, l'appartenance d'un élément à un ensemble n'est plus définie de manière binaire stricte.

Soit un sous-ensemble  $A$  flou d'un ensemble  $E$ . Par définition :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid (x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1])\} \quad (6.4)$$

où pour tout élément  $x$  appartenant au domaine  $X$ , la fonction d'appartenance, notée  $\mu_A(x) : x \rightarrow [0, 1]$ , traduit le degré d'appartenance (la compatibilité) de  $x$  à  $A$ , c'est-à-dire :

- si  $\mu_A(x) = 1$  alors  $x \in A$  (compatibilité maximale) ;
- si  $\mu_A(x) = 0$  alors  $x \notin A$  (incompatibilité) ;
- si  $0 < \mu_A(x) < 1$ , l'appartenance de  $x$  au sous-ensemble  $A$  n'est pas certaine (degré de compatibilité intermédiaire).

Les fonctions d'appartenance peuvent prendre des formes très variées. La figure 6.6 illustre les plus classiques à savoir les fonctions d'appartenance trapézoïdale, triangulaire, sigmoïdale ou encore gaussienne (Fig. 6.6). Il est possible d'en définir de toute nature. Cette définition montre donc que le concept de fonction d'appartenance permet également la représentation de quantités non déterministes.

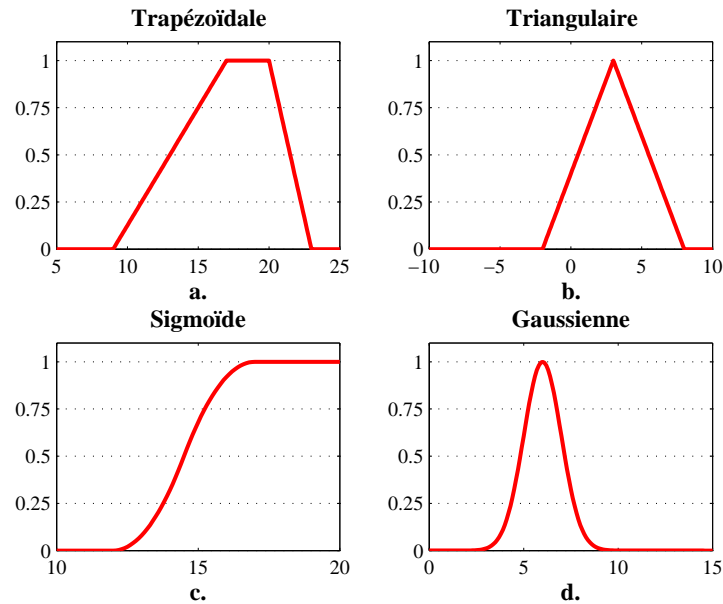


FIG. 6.6 – Exemples de fonctions d'appartenance.

Zadeh a ensuite étendu la théorie des ensembles flous pour poser les bases du raisonnement possibiliste [Zad78]. Celui-ci a alors été complété par Dubois et Prade [DP88] à partir des bases de la théorie de l'évidence, développées par Dempster et



Schafer [Dem68, Sch76], dont le but initial était de généraliser le concept d'inférence Bayésienne de la théorie des probabilités.

### Aptitude à représenter les *incertitudes épistémiques non aléatoires*

**Approche par intervalles.** La représentation des *incertitudes épistémiques non aléatoires*, à laquelle conduit l'approche par intervalles, est purement subjective. Aussi, il est nécessaire de bien garder à l'esprit que l'intervalle s'interprète alors essentiellement comme les valeurs de la quantité que l'analyste considère possibles (paramètre de conception non encore figé) au moment du processus de conception auquel est réalisé l'étude. Il ne modélise en aucun cas sa plage de variation réelle. Il faut alors tenir compte de cette subjectivité au moment du dépouillement des résultats finaux de l'analyse.

**Approche probabiliste.** Pour représenter des *incertitudes épistémiques non aléatoires*, une densité de probabilité peut être choisie, *a priori*, en fonction du peu d'information disponible et de son caractère subjectif. L'information contenue dans cette représentation probabiliste particulière traduit simplement, de manière subjective, la vraisemblance présumée que le paramètre ou la quantité examinés prennent une valeur spécifique. L'approche probabiliste assure une modélisation satisfaisante des *incertitudes épistémiques non aléatoires*, bien que reposant essentiellement sur des connaissances subjectives. En outre, une procédure d'actualisation Bayésienne<sup>2</sup> peut assurer la mise à jour de la représentation probabiliste dès lors que de nouvelles informations se présentent. Toutefois, il est indispensable de bien prendre en compte le caractère subjectif d'une telle représentation au moment du dépouillement et de l'interprétation des résultats de toute analyse plus globale.

**Approche floue.** La modélisation par une approche floue des *incertitudes épistémiques non aléatoires* nécessite le choix d'un ensemble flou qui représente la spécification subjective du concepteur. Cela ne pose aucun problème *a priori* dès lors que ce type d'incertitude caractérise un paramètre dont la définition est vouée à être optimisée et affinée au fur et à mesure de l'activité de conception. Toutefois, comme pour une approche probabiliste, il est indispensable de bien prendre en compte le caractère subjectif d'une telle représentation au moment du dépouillement et de l'interprétation des résultats de toute analyse plus globale.

### Aptitude à représenter les *variabilités incertaines*.

**Approche par intervalles.** L'arithmétique des intervalles s'adapte parfaitement à la modélisation des *variabilités incertaines*. En effet, ceci correspond à la situation où les bornes inférieure et supérieure d'une propriété physique non déterministe sont connues mais pour laquelle on ne dispose d'aucune information concernant la distribution de ses valeurs potentielles au sein de ce support.

<sup>2</sup>Cette approche est explicitée dans la suite au même titre que la méthode du maximum d'entropie qui permet de définir la meilleure densité de probabilité en fonction de la connaissance subjective restreinte que l'on possède.

**Approche probabiliste.** De manière rigoureuse, la modélisation des *variabilités incertaines* par une méthode probabiliste est tout à fait possible. Cependant, il faut être vigilant puisque le choix d'une fonction de densité de probabilité plutôt qu'une autre peut fortement influencer l'interprétation des résultats de toute analyse plus globale.

**Approche floue.** L'approche floue autorise certainement la représentation la plus flexible des *variabilités incertaines*. En effet, elle peut être exploitée pour représenter, au moyen d'un ensemble flou particulier, une classe de quantité probabiliste dont la fonction de distribution se situerait entre deux frontières déterminées au moyen de la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou considéré [HJO04, MV05]. Autrement dit, elle permet la réalisation à partir d'une représentation unique et en une seule analyse ce qu'il ne serait possible de faire, dans le contexte d'une analyse probabiliste classique, que par le biais d'une multitude d'analyses.

#### Aptitude à représenter les *variabilités certaines*

**Approche par intervalles.** La représentation qu'elle fournit pour la prise en compte de *variabilités certaines* est loin d'être idéale. En effet, ce type d'incertitudes fait référence à des quantités impactées par des incertitudes aléatoires dont on connaît exactement l'intervalle de variation et la fréquence de chacune des valeurs de cet intervalle. Par conséquent, la mise en œuvre de ce type d'approche omet totalement l'information sur les fréquences, ce qui constitue une limite importante à son utilisation.

**Approche probabiliste.** La modélisation probabiliste de ce type d'incertitudes au moyen d'une fonction de densité de probabilité est totalement cohérente avec la définition des *variabilités certaines* que nous avons introduite précédemment. D'une manière générale, c'est même la meilleure représentation que l'on peut en obtenir : l'information sur le support de variation et sur la vraisemblance d'une quantité est parfaitement prise en compte et de manière non ambiguë par une fonction densité de probabilité.

**Approche floue.** La représentation floue de *variabilités certaines* nécessite la conversion de l'information probabiliste disponible (nous rappelons que l'on connaît dans ce cas de manière très objective l'intervalle de variation et la fréquence de chacune des valeurs de cet intervalle) pour assurer sa compatibilité avec le concept de fonction d'appartenance. Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette conversion [CT86, DP88]. Cependant, cette façon de faire n'est pas naturelle puisqu'elle conduit à la substitution d'informations objectives par une représentation forcément subjective et beaucoup moins riche.

#### Synthèse

La pertinence de l'une ou l'autre des représentations mathématiques des incertitudes dépend essentiellement de la connaissance et de l'information objective disponibles, et donc, de l'étape du processus de conception (Chapitre 4 - Fig. 4.1) à laquelle on se situe. Par conséquent, cette discussion souligne plutôt la complémentarité des

approches probabiliste et non-probabiliste de représentation de l'incertain plus que leur compétitivité [ZHH<sup>+</sup>02] :

- Au cours de la conception conceptuelle (*conceptual design*), les aspects non déterministes de la conception sont plutôt incertains que variables. A cette étape, il s'agit plutôt d'explorer l'espace de conception [RYE06]. Même si une approche probabiliste est déjà applicable, la représentation des incertitudes par des intervalles, voire des nombres flous, est particulièrement adaptée.
- Au cours de la conception préliminaire (*embodiment design*), il est possible de tirer profit de chacune des représentations. L'analyse par intervalle permet d'abord une validation objective de la conception en autorisant des calculs sur la base des intervalles de tolérance spécifiés par les concepteurs pour chacune des caractéristiques du système. L'approche floue peut ensuite participer à l'optimisation de la définition de ces spécifications. Enfin, l'approche probabiliste est aussi exploitable, même si la disponibilité d'observations objectives sur les quantités incertaines reste encore négligeable devant l'information subjective. Elle devient très pertinente dès lors que la définition des process de fabrication, des matériaux, des fournisseurs, *etc...* se précise. En effet, celle-ci se traduit habituellement par une amélioration de l'objectivité de l'information servant à la caractérisation des incertitudes relatives aux paramètres de conception.
- Au cours de la conception détaillée (*detail design*), l'état de la connaissance est généralement beaucoup plus fin. Il a normalement profité d'une actualisation en fonction de l'arrivée de nouvelles informations, encouragée, par exemple, par les plans d'actions et les plans de progrès définis et menés au cours d'une activité de conception classique. Les approches non probabilistes ont donc beaucoup moins de valeur à cette étape du processus de conception. Elles perdent de leur intérêt puisqu'elles ne prennent pas en compte de manière optimale l'ensemble de l'information objective dont disposent à présent les acteurs de la conception. En effet, elles privent ces derniers d'informations supplémentaires cruciales au moment de la validation de la conception, que ce soit au niveau de l'identification des performances du système, de sa robustesse ou encore de sa fiabilité.

Ceci étant, la discussion précédente a aussi le mérite de souligner la capacité de l'approche probabiliste à fournir une modélisation acceptable des incertitudes quel que soit leur type. Elle se distingue donc par le caractère général et homogène de la représentation qu'elle est en mesure de fournir aux différentes phases du processus de conception.

Dans le cadre de la résolution de la problématique spécifique qui est la nôtre, c'est-à-dire du développement d'un modèle de fiabilité reposant sur la simulation de modèles *physiques et systèmes* des scénarios de défaillance tout au long du processus de conception, ces conclusions participent à l'argumentation et à la justification du choix d'une représentation probabiliste des incertitudes. En outre, le fait que les analyses de fiabilité usuelles et les produits qui en émanent reposent sur des mesures de probabilités, confirme également l'intérêt de ce choix.

Il nous reste maintenant à expliciter les méthodes que nous utilisons, du ressort du statisticien, pour la modélisation probabiliste des paramètres de conception (*i.e.* les paramètres élémentaires impliqués dans les scénarios phénoménologiques de dé-

faillance des systèmes mécaniques) sachant les différents niveaux d'information et de connaissance que l'on possède au cours de la conception.

### 6.2.3 Modélisation classique par ajustement de lois

La modélisation d'un paramètre de conception incertain  $X$  par ajustement d'une loi de probabilité usuelle est conseillée dès lors que l'on possède une connaissance et une information suffisantes sur son comportement statistique. Autrement dit, il est nécessaire de disposer d'un nombre suffisant d'observations que l'on peut traduire, de manière plus ou moins objective, sous la forme d'un échantillon de valeurs  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  du paramètre aléatoire  $X$  considéré. Nous présentons ici la démarche générique que nous exploitons dans ce cas de figure. Elle est mise en œuvre dans la suite pour caractériser la loi de distribution de la tension de pose initiale des vis de culasses  $F_{pose}$  (cf. exemple conducteur, chapitre 3, section 3.2). Lorsque l'information demeure trop lacunaire et subjective, nous préférons à ces approches d'ajustement, la technique de modélisation Bayésienne qui est également explicitée par la suite.

#### Méthodes empiriques basiques

La première approche, la plus intuitive, consiste à analyser la forme de l'histogramme de l'échantillon  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , afin de s'orienter vers le choix d'un modèle probabiliste plutôt qu'un autre. Une forme symétrique conduit généralement à retenir l'hypothèse de normalité, elle peut aussi suggérer l'utilisation d'autres lois symétriques (e.g. loi de Student). En revanche, une forme dissymétrique de l'histogramme dirige plutôt vers l'hypothèse de lois de types lognormale, gamma, weibull ou encore bêta. Le choix des meilleures hypothèses entre différentes distributions de forme semblable s'effectue alors en tenant compte du phénomène ou du paramètre physique étudié. La plage de variation et le domaine de définition *a priori* peuvent également infirmer ou confirmer certaines hypothèses, au même titre que la vérification sommaire de certaines propriétés statistiques de l'échantillon. Par exemple, dans le cas d'une hypothèse de loi de Poisson nous vérifions que la moyenne et la variance empiriques calculées à partir de l'échantillon sont quasiment identiques. Enfin, pour la plupart des lois de probabilité usuelles, une transformation mathématique simple permet de représenter la courbe de répartition par une droite. La fonction de répartition empirique d'un échantillon de taille assez grande diffère peu de la fonction théorique. La vérification de l'hypothèse réalisée sur la loi peut donc être effectuée en s'assurant de l'adéquation de la distribution empirique de l'échantillon à une droite sur un graphe aux échelles appropriées. En outre, dans la mesure où l'hypothèse semble se vérifier, cette analyse conduit souvent à l'estimation graphique du vecteur de paramètres  $\theta_f$  de la loi retenue, alors noté  $\hat{\theta}_f$ .

Ces méthodes empiriques peuvent constituer une première étape d'une procédure d'ajustement de loi à partir de la donnée d'un échantillon d'un paramètre de loi inconnue. Il reste encore la phase fondamentale qui consiste à estimer plus finement les paramètres  $\theta_f$  correspondant à la loi ou aux lois retenues par hypothèse, puis à valider le modèle probabiliste ainsi obtenu au moyen de tests d'adéquation.

### Méthode du maximum de vraisemblance

Le maximum de vraisemblance est une technique qui, sous l'hypothèse que la variable aléatoire  $X$  suit une loi de probabilité particulière  $f_X(x, \theta_f)$ , permet d'en estimer au mieux les paramètres  $\theta_f$  à partir d'un échantillon d'observations indépendantes  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Plus spécifiquement, il s'agit de construire (en utilisant la fonction de densité de probabilité supposée  $f_X(x, \theta_f)$  et l'échantillon  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ) une fonction appelée vraisemblance, notée  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_f)$  et de minimiser son logarithme par rapport aux paramètres  $\theta_f$  inconnus.

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité de probabilité  $f_X(x, \theta_f)$  supposée connue (par le biais d'une méthode empirique, par exemple) mais dont les  $m$  paramètres  $\theta_f = (\theta_{f_1}, \theta_{f_2}, \dots, \theta_{f_n})$  sont inconnus. La fonction de vraisemblance de l'échantillon d'observations indépendantes  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de la variable aléatoire  $X$  est classiquement définie par :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_f) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i, \theta_f) \quad (6.5)$$

L'estimateur  $\hat{\theta}_f$  des paramètres inconnus est alors déterminé de sorte qu'il rende maximum cette fonction de vraisemblance. Dans la pratique, cela revient à maximiser le logarithme de la vraisemblance :

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_f) = \sum_{i=1}^n \ln f_X(x_i, \theta_f) \quad (6.6)$$

Estimer le vecteur de paramètres  $\theta_f$  par la méthode du maximum de vraisemblance, c'est donc proposer comme valeur de  $\theta_f$  celle qui rend maximale la vraisemblance  $\ln L$ , à savoir la probabilité d'observer les données comme réalisation d'un échantillon de la loi  $f_X(x, \theta_f)$ . Finalement,  $\hat{\theta}_f$  est donc solution du système d'équations aux dérivées partielles de  $\ln L$  par rapport aux paramètres inconnus  $(\theta_{f_1}, \theta_{f_2}, \dots, \theta_{f_n})$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_{f_1}, \theta_{f_2}, \dots, \theta_{f_n})}{\partial \theta_{f_1}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_{f_1}, \theta_{f_2}, \dots, \theta_{f_n})}{\partial \theta_{f_m}} = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

Ce système se résout généralement au moyen de techniques numériques classiques.

### Validation par des méthodes de tests statistiques d'adéquation

La validation des modèles issus de techniques d'ajustement par des tests statistiques d'adéquation est indispensable.

Une première remarque s'impose : les tests d'adéquation ne permettent pas de trouver la loi d'une variable aléatoire  $X$  dont on ne connaît qu'un échantillon limité de réalisations  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , mais seulement d'accepter ou de rejeter une hypothèse simple émise *a priori* ou affiner au moyen du principe de maximum de vraisemblance.

Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un échantillon de  $n$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $X$ . Soit  $F_X(x)$  la fonction de répartition théorique inconnue de  $X$ . L'hypothèse de départ  $H_0$  consiste à supposer que la loi de distribution est  $F_X^*(x, \hat{\theta}_f)$ , où les paramètres  $\hat{\theta}_f$  ont préalablement été estimés. Le but du test est de mesurer la validité de cette hypothèse  $H_0$  par rapport à l'hypothèse alternative  $H_1$  : la loi de distribution théorique n'est pas  $F_X^*(x, \hat{\theta}_f)$ . La formulation générale d'un test d'adéquation est alors la suivante :

$$\begin{aligned} H_0 : F_X(x) &= F_X^*(x, \hat{\theta}_f) \quad \forall x \\ H_1 : \exists x \quad F_X(x) &\neq F_X^*(x, \hat{\theta}_f) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Il existe plusieurs techniques de vérification d'adéquation de lois de probabilité parmi lesquelles se distinguent les tests du  $\chi^2$ , de Kolmogorov-Smirnov ou encore de Cramer-von Mises [Sap90].

Dans le cadre de nos travaux, nous exploitons essentiellement le test de Kolmogorov-Smirnov. Soit  $S_X^n(x)$  la fonction de répartition empirique obtenue à partir de l'échantillon  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $X$ .  $S_X^n(x)$ , qui n'est autre qu'un histogramme cumulé, peut être considérée comme une estimation de  $F_X(x)$ . Le principe de ce test consiste alors à construire un indicateur d'écart  $D_n$  entre  $S_X^n(x)$  et  $F_X^*(x, \hat{\theta}_f)$  à partir de la valeur absolue de la distance maximum observée entre  $S_X^n(x)$  et  $F_X^*(x, \hat{\theta}_f)$  :

$$D_n = \max_x \left| S_X^n(x) - F_X^*(x, \hat{\theta}_f) \right| \quad (6.9)$$

L'hypothèse  $H_0$  est non rejetée si :

$$D_n < w_{1-\alpha} \quad (6.10)$$

où :

- $\alpha$  est fixé et définit la probabilité de choisir  $H_1$  alors que  $H_0$  est vraie,
- les valeurs  $w_{1-\alpha}$  sont lues sur les tables de Kolmogorov-Smirnov [Sap90].

#### 6.2.4 Modélisation Bayésienne

Les principaux intérêts de la démarche Bayésienne résident dans sa capacité à fusionner différentes sources d'information et à prendre en compte l'évolution de l'état des connaissances en fonction de l'acquisition de nouvelles informations. La modélisation d'un paramètre de conception incertain par une approche Bayésienne est donc conseillée dès lors que l'on n'en possède qu'une connaissance très subjective vouée à s'affiner et à devenir de plus en plus objective au cours de l'activité de conception. Autrement dit, une représentation probabiliste initiale *a priori* est sélectionnée puis améliorée, actualisée, au fur et à mesure que de l'information nouvelle se présente. Nous explicitons ici les principales étapes théoriques de la démarche de modélisation Bayésienne que nous exploitons. Elle est mise en œuvre dans la suite pour la caractérisation du module d'Young  $E$  de l'axe de piston considéré dans notre exemple conducteur (Chapitre 3, section 3.2).

### Connaissance initiale et modèle *a priori* de maximum d'entropie

Le choix d'un modèle *a priori* dépend de l'expertise et de la connaissance subjective initiale des acteurs de la conception. Il peut être opéré de manière tout à fait empirique ou bien bénéficier de l'application du principe de maximum d'entropie [KK92].

A la base, l'entropie est une grandeur thermodynamique<sup>3</sup>. Dans le cadre de la physique statistique, Boltzmann définit l'entropie  $S(p)$  d'un système comme une quantité physique, mesurable, associée au degré de désordre d'un système macroscopique, ou au manque d'informations sur son état microscopique :

$$S(p) = -k \ln N \quad (6.11)$$

où  $k$  est la constante de Boltzmann,  $N$  est le nombre total d'états microscopiques du système et mesure la complexité du désordre. Dans le cas où les états possibles du système sont associés à une probabilité  $p_i$  particulière (les états ne sont pas équiprobables), l'entropie statistique s'écrit alors :

$$S(p) = -k \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \quad (6.12)$$

La relation 6.12 permet d'associer à chaque probabilité  $p_i$  un degré de désordre qui reflète la connaissance sur l'état du système. Tout ajout d'information qui réduit les probabilités  $p_i$  a pour effet de diminuer l'entropie statistique. Autrement dit, rajouter de l'information impose des contraintes supplémentaires sur les lois de probabilité et limite l'ensemble des probabilités sur lequel est recherchée l'entropie maximale.

Shannon a ensuite étendu cette définition discrète de la physique statistique afin de traduire la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information [Sha48], ce qui l'a entre autre conduit à introduire l'entropie  $H$  d'une distribution de densité continue  $p(x)$  :

$$H = \int_{\mathcal{D}_X} p(x) \ln p(x) dx \quad (6.13)$$

Maximiser cette entropie  $H$ , sous des contraintes  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  définies par la prise en compte de la connaissance et de l'information disponible (limitée ou subjective) sur une quantité aléatoire  $X$ , est une méthode bien connue dans la littérature pour la détermination *a priori* d'une approximation de la fonction de densité de probabilité  $f_X(x)$  de  $X$ . Il s'agit en fait de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } H &= \int_{\mathcal{D}_X} p(x) \ln p(x) dx \\ \text{sous les contraintes } \mathbf{E}[\eta_i(x)] &= \int_{\mathcal{D}_X} \eta_i(x) p(x) dx = c_i, \quad i = 0, \dots, k \end{aligned} \quad (6.14)$$

où  $c_0 = 1$ ,  $\eta_0(x) = 1$ ,  $\eta_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sont des fonctions connues. La solution classique de ce problème est donnée par :

$$p(x) = \exp \left[ - \sum_{i=0}^k \lambda_i \eta_i(x) \right] \quad (6.15)$$

---

<sup>3</sup>Historiquement, la thermodynamique peut être définie comme la science de tous les phénomènes qui dépendent de la température et de ses changements. Les travaux de Ludwig Boltzmann ont participé à lui conférer une dimension plus universelle si bien qu'elle est également définie comme la science de l'équilibre des grands systèmes.

où les  $k + 1$  multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  sont obtenus en résolvant le système linéaire d'équations suivant :

$$G_i(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\mathcal{D}_X} \eta_i(x) \exp \left[ - \sum_{i=0}^k \lambda_i \eta_i(x) \right] dx = c_i, \quad i = 0, \dots, k \quad (6.16)$$

La fonction de densité de probabilité définie par la relation 6.15 permet la représentation d'un grand nombre de fonctions de densité usuelles. Il suffit simplement de choisir la valeur de  $k$  et les  $\eta_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, k$  appropriés. En général, les  $\eta_i(x)$  correspondent aux puissances de  $x$  ou au logarithme de  $x$ . Lorsque  $\eta_i(x) = x^i$ ,  $i = 1, \dots, k$  alors les contraintes  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  sont les  $k$  premiers moments de la loi désignée par  $p(x)$ . De cette manière, le principe du maximum d'entropie préconise l'utilisation de la loi :

- uniforme si la plage de variation du paramètre étudié est bornée (*e.g.* une dimension géométrique spécifiée au cahier des charges par sa valeur nominale et son intervalle de tolérance)
- exponentielle si la moyenne du paramètre est connue et si sa plage de variation est bornée ou semi-bornée,
- gaussienne si l'on dispose de l'information nécessaire à la détermination de sa moyenne et de son écart-type.

Pour un approfondissement de l'exploitation du principe de maximum d'entropie dans le cadre de la modélisation statistique nous orientons le lecteur vers les références [KK92, Ven98].

### Principes de l'actualisation Bayésienne

Le principe de l'actualisation Bayésienne permet classiquement la caractérisation évolutive de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ , dans notre cas un paramètre de conception, en fonction de la mise à jour de la connaissance disponible sur ses réalisations potentielles.

Soit  $f_X(x|\boldsymbol{\theta}_f)$  la densité de probabilité *a priori* de la variable aléatoire  $X$ , où  $\boldsymbol{\theta}_f$  est un vecteur de paramètres de la densité (*e.g.* la moyenne et l'écart-type de  $X$ ). Celle-ci traduit la connaissance initiale de l'analyste sur le comportement stochastique du paramètre de conception en l'absence de toute autre information supplémentaire. Elle peut être obtenue, par exemple, par le biais du principe de maximum d'entropie comme nous l'avons explicité auparavant. L'approche Bayésienne consiste alors à estimer la densité de probabilité  $f_{\boldsymbol{\Theta}_f}(\boldsymbol{\theta}_f|x_1, x_2, \dots, x_n)$  du vecteur des paramètres, dès lors considéré aléatoire et noté  $\boldsymbol{\Theta}_f$ , sachant la donnée d'un ensemble d'information et d'observations nouvelles  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $X$  :

$$f_{\boldsymbol{\Theta}_f}(\boldsymbol{\theta}_f|x_1, x_2, \dots, x_n) = cL(\boldsymbol{\theta}_f|x_1, x_2, \dots, x_n) f_{\boldsymbol{\Theta}_f}(\boldsymbol{\theta}_f) \quad (6.17)$$

où :

- $f_{\boldsymbol{\Theta}_f}(\boldsymbol{\theta}_f|x_1, x_2, \dots, x_n)$  est la densité *a posteriori* représentant notre nouvel état de connaissance sur  $\boldsymbol{\Theta}_f$ ,
- $f_{\boldsymbol{\Theta}_f}(\boldsymbol{\theta}_f)$  est la densité *a priori* représentant la connaissance subjective de  $\boldsymbol{\Theta}_f$  avant d'avoir accès aux observations  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,



- $c = \left[ \int_{\mathcal{D}_{\theta_f}} L(\theta_f | x_1, x_2, \dots, x_n) p_{\Theta_f}(\theta_f) d\theta_f \right]^{-1}$  est une constante de normalisation,
- $L(\theta_f | x_1, x_2, \dots, x_n)$  est la fonction de vraisemblance représentant l'information objective acquise à travers la donnée des nouvelles observations. Elle est définie de la même manière que dans l'équation 6.5.

Concernant la problématique non triviale du sondage, de l'élicitation et de l'exploitation du jugement des experts nous renvoyons le lecteur aux références très complètes suivantes [Ayy01, LP01, BM05].

Finalement, en utilisant ce résultat et le théorème des probabilités totales, la fonction de densité prédictive de  $X$  (ou fonction de densité de  $X$  a posteriori) est obtenue par l'intermédiaire de la relation :

$$f_{X|x_1, x_2, \dots, x_n}(x) = \int_{\mathcal{D}_{\theta_f}} f_X(x | \theta_f) f_{\Theta_f}(\theta_f | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta_f \quad (6.18)$$

L'évaluation de l'équation 6.18 nécessite le calcul d'une intégrale multiple. Des solutions numériques efficaces existent [DM96, GDKM93] lorsque  $f_{X|x_1, x_2, \dots, x_n}(x)$  ne peut pas être estimée analytiquement.

### 6.2.5 Indice de représentativité

Afin de conserver une trace de la subjectivité de la modélisation probabiliste de certains paramètres élémentaires de conception nous proposons d'évaluer leur maturité sur une échelle empirique de représentativité de 1 à 5. Ces indices de représentativité prennent tout leur sens au moment de l'interprétation des résultats issus de la simulation numérique de modèles de comportements physiques dont les entrées sont représentées de la sorte. Ceci est encore plus vrai lorsque ces simulations numériques ont pour but l'estimation de mesures de fiabilité.

En fait, intégrée par la suite dans la procédure de traitement fiabiliste proposée, l'influence de cette maturité de la représentation des incertitudes de caractérisation des paramètres de conception sur la fiabilité du système est estimée (Chapitre 8). Par conséquent, les maillons faibles de la modélisation probabiliste des paramètres élémentaires de défaillance sont exhibés. Des actions visant à améliorer leur caractérisation, au juste nécessaire, sont alors définies.

### 6.2.6 Exemples : serrage culasse et module d'Young de l'axe de piston

#### Tension de serrage des vis de culasse

La tension des vis de serrage  $T_{pose}$  est un paramètre de conception pour lequel nous avons un important retour d'expérience. Quelle que soit l'étape du processus de conception à laquelle on se situe, il est donc envisageable de modéliser l'incertitude quant à sa caractérisation au moyen des méthodes classiques d'ajustement de loi de probabilité. Dans le cadre de l'exemple traité, nous avons à disposition un échantillon  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de taille  $n = 250$ . Son histogramme est représenté en figure 6.7. Une analyse immédiate de la forme de l'histogramme (non symétrique) et des propriétés

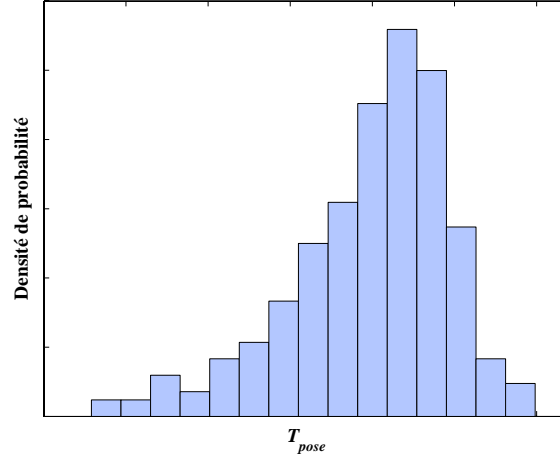


FIG. 6.7 – Histogramme de l'échantillon d'observations de  $T_{pose}$ .

statistiques élémentaires de l'échantillon nous oriente plutôt vers une hypothèse de loi de type lognormale, gamma, weibull ou encore bêta.

La mise en œuvre de la méthode de maximum de vraisemblance nous permet d'examiner ces différentes hypothèses et d'en retenir la meilleure (pour l'exemple, nous avons également conservé les hypothèses de loi uniforme et normale bien qu'elles n'aient que peut de chance d'être représentatives). Le résultat de l'analyse de vraisemblance est illustré en figure 6.8. Un critère de qualité de l'ajustement peut être défini à partir du résidu  $res$  mesurant la somme des écarts entre la distribution empirique et la distribution ajustée aux points de l'échantillon élevés au carré :

$$res = \sum_{i=1}^n \left( S_n(x_i) - F_X^*(x_i, \hat{\theta}_f) \right)^2 \quad (6.19)$$

Les résidus pour les différentes hypothèses de loi sont explicités dans le tableau 6.1. Ce dernier, au même titre que la figure 6.8, indique que l'hypothèse de loi de Weibull est de loin la meilleure. Ceci est par ailleurs confirmé par le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov au seuil de rejet  $\alpha = 0,05$  comme au seuil de rejet  $\alpha = 0,01$  (Fig. 6.9).

La loi de Weibull dont les paramètres ont été estimés au moment de l'analyse du maximum de vraisemblance est donc utilisée pour la modélisation stochastique de la tension de pose des vis de culasse  $T_{pose}$ . Etant donnée l'objectivité des observations qui ont permis l'obtention de cette représentation probabiliste, nous lui associons un critère de représentativité maximum de 5.

Loi	Uniforme	Normale	Lognormale	Weibull	Gamma	Bêta
Résidu	8,3275	0,5916	0,7567	0,0459	0,6979	0,8416

TAB. 6.1 – Résidu du test d'ajustement de maximum de vraisemblance de  $T_{pose}$ .

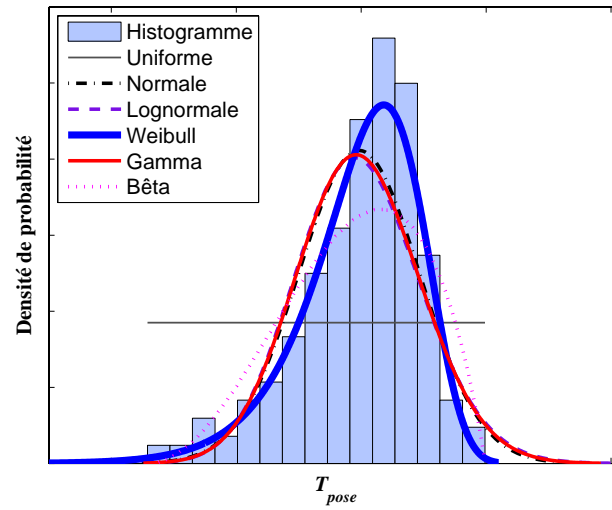


FIG. 6.8 – Ajustement de la loi de  $T_{pose}$  par maximum de vraisemblance.

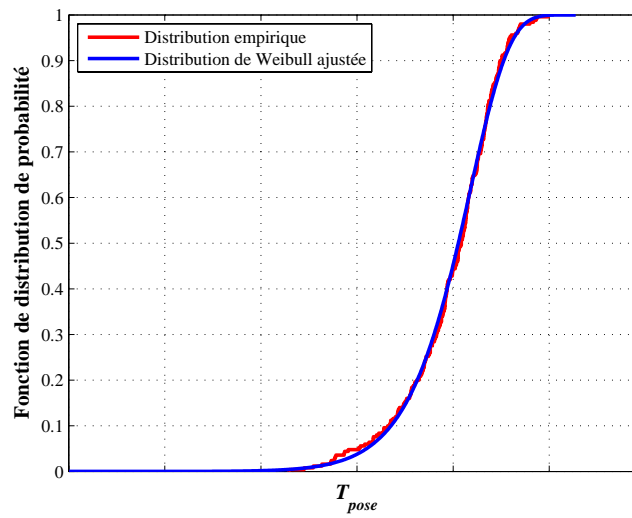
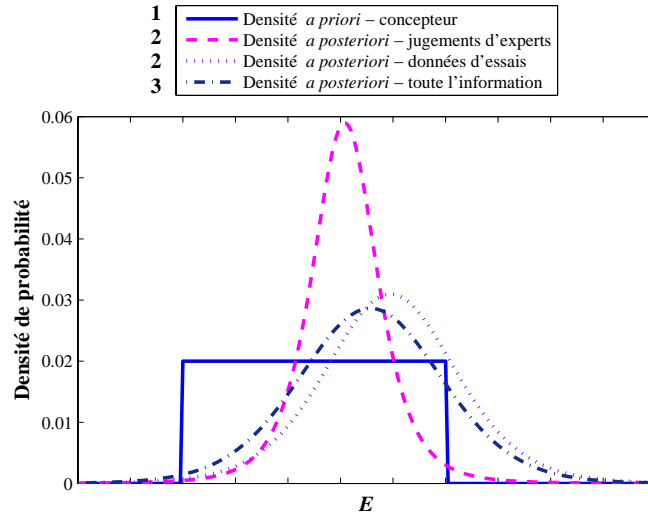


FIG. 6.9 – Interprétation graphique du test de Kolmogorov-Smirnov pour  $T_{pose}$ .


 FIG. 6.10 – Modélisation Bayésienne évolutive de  $E$  et son niveau de représentativité.

### Module d'Young de l'axe de piston

Le module d'Young  $E$  de l'axe est un paramètre de conception pour lequel nous n'avons ni retour d'expérience ni autre information objective durant les premières étapes du processus de conception. Il est donc préférable d'opter pour une représentation Bayésienne de son comportement stochastique, modélisation permettant la prise en compte de notre relative ignorance initiale mais aussi capable d'intégrer toute nouvelle information obtenue au fil de l'activité de conception.

L'information initiale sur  $E$  est donc généralement limitée à la donnée subjective d'une valeur nominale et d'un intervalle de tolérance correspondant à des spécifications standard préconisées par les concepteurs. Ces intervalles de tolérances peuvent déjà faire l'objet d'une modélisation stochastique en leur ajustant, par exemple, une fonction de densité de probabilité uniforme en accord avec le principe du maximum d'entropie (Eq. 6.14). Celle-ci est illustrée dans la figure 6.10 par la densité *a priori* du concepteur. Etant donnée sa subjectivité, nous lui associons l'indice de représentativité égal à 1. Ensuite, il est communément admis que l'hypothèse selon laquelle la moyenne  $\mu_E$  de  $E$  suit une loi normale n'est pas fantaisiste. En revanche, son écart-type  $\sigma_E$  est lui totalement inconnu dans un premier temps. Au fur et à mesure que l'on progresse à travers les différentes étapes du processus de conception, la connaissance de  $E$  se précise. Nous sommes d'abord en mesure d'exploiter quelques données émanant de l'élicitation du jugement d'experts. Cette information est fusionnée avec l'*a priori* du concepteur. La densité prédictive *a posteriori* de  $E$  qui en résulte est illustrée en figure 6.10. Ce modèle étant plus fin que le précédent, nous lui associons un indice de représentativité égal à 2. Ensuite, l'acquisition de quelques données d'essais (en nombre limité toutefois) nous autorise à mettre une nouvelle fois à jour notre modèle probabiliste (densité *a posteriori* à partir des données d'essais et densité *a posteriori* à partir

de l'ensemble de l'information dans la figure 6.10).

Finalement, nous obtenons un modèle probabiliste fusionnant l'ensemble de l'information disponible sur  $E$ . Etant donné, le peu d'information objective à partir duquel il est construit, son indice de représentativité n'est pas supérieur à 3. Il a le potentiel d'être actualisé à tout moment.

### 6.2.7 Conclusion

Dans cette section, nous avons examiné la problématique de la modélisation non déterministe des paramètres de conception. Une représentation probabiliste a d'abord été justifiée puis adoptée. Elle a pour intérêt de pouvoir intégrer l'ensemble de la connaissance disponible à un instant précis de la conception. Une procédure générique d'ajustement de lois a été introduite. Lorsque la représentation probabiliste est obtenue de manière subjective à partir d'un faible nombre de données ou d'observations, sa capacité de mise à jour par actualisation Bayésienne est exploitée : elle permet d'intégrer à la modélisation toute information supplémentaire dès lors qu'elle est disponible. En outre, la représentativité de la modélisation probabiliste de chaque paramètre de conception, sachant l'information disponible, est caractérisée. Elle sera prise en compte ultérieurement au moment de l'interprétation fiabiliste des scénarios de défaillance phénoménologiques et probabilistes que nous construisons.

Les paramètres élémentaires  $\mathbf{X}^{(0)}$  des scénarios de défaillance phénoménologiques que nous développons sont donc renseignés par leur fonction de densité de probabilité. Ils ne sont pas forcément tous indépendants. Dans ce cas, ils peuvent être corrélés et il est alors nécessaire de fournir leur matrice de corrélation, notée  $\rho_{\mathbf{X}^{(0)}}$ .

## 6.3 Modélisation évolutive des comportements physiques

La modélisation des comportements physiques des systèmes mécaniques est avant tout du ressort des experts de la physique et des mécaniciens, même si l'on verra par la suite que le statisticien peut apporter utilement sa pierre à l'édifice. Ce qui nous importe ici n'est autre que la caractérisation de la physique en chaque nœud (*i.e.* de chaque modèle de comportement  $M_k^{(l)}$  ou modèle de performance  $G_k^{(l)}$ ) des scénarios de défaillance phénoménologiques que nous développons (Fig. 6.1). Comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent, la modélisation des phénomènes physiques dépend déjà du niveau de la granularité, c'est-à-dire du niveau de finesse de la structure de ces scénarios de défaillance phénoménologiques (Chapitre 5). Elle est également fortement impactée par la connaissance et la maîtrise qu'ont les mécaniciens et les experts de la physique des différents phénomènes impliqués dans les défaillances des systèmes mécaniques.

Dans cette section, nous distinguons d'abord les différentes natures des modèles physiques dont on tire classiquement le meilleur dans le cadre d'une analyse de fiabilité physique. Nous en profitons pour montrer comment la modélisation physique a la capacité d'évoluer en s'affinant au cours du processus de conception. Nous soulignons ensuite l'intérêt d'exploiter des techniques de métamodélisation dans le cadre de l'élaboration évolutive de modèles de fiabilité *systèmes et physiques*. Enfin, nous illustrons

nos propos sur la base des exemples des phénomènes de remplissage et de combustion qui ont été définis dans le chapitre 3 lors de la présentation générale de notre exemple conducteur.

### **6.3.1 Modélisation physique et expertise**

#### **Les trois grandes natures de modèles physiques**

Nous distinguons essentiellement trois types de modèles physiques : les modèles analytiques explicites, les modèles implicites émanant d'une connaissance algorithmique et les modèles issus d'une connaissance heuristique ou experte.

**Modèles de connaissance analytique.** Ils sont issus de théories bien maîtrisées et formulées au moyen d'équations analytiques. Ils se distinguent généralement par la simplicité de leur construction et de leur évaluation. Toutefois, leur aptitude à bien représenter la physique dépend des hypothèses sur lesquelles sont fondées les théories correspondantes. Notons également que les phénomènes physiques complexes ne peuvent bien souvent pas être modélisés aisément de manière explicite. Le recours à des techniques de modélisation implicite est alors nécessaire.

**Modèles de connaissance algorithmique.** Ces modèles de connaissance algorithmique sont en fait les solutions numériques validées (essentiellement par éléments finis) des théories précédentes lorsque celles-ci ne peuvent plus être formalisées de manière simple et explicite.

**Modèles heuristiques d'expertise.** Ils permettent d'approcher et de donner une première représentation mathématique de phénomènes physiques complexes peu connus ou encore mal maîtrisés. Ils sont construits à partir de l'ensemble de l'information experte disponible (*e.g.* retour d'expérience, jugements d'experts) et de campagnes d'essais dites de caractérisation. Généralement, il s'agit d'une idéalisation statistique des comportements et des phénomènes plutôt que d'une véritable modélisation reposant sur des lois physiques préétablies.

#### **Evolution de la modélisation au cours du processus de conception**

La connaissance du comportement physique d'un système mécanique en cours de conception et des phénomènes qui impactent sa fiabilité évolue au fur et à mesure que la définition détaillée se précise. Nous montrons comment cette évolution se traduit en terme de modélisation en considérant à nouveau la décomposition systématique du processus de conception selon les phases de conception conceptuelle, préliminaire et détaillée (Fig. 6.11).

Par nature, l'étape de conception conceptuelle ne nécessite pas la modélisation du comportement physique des systèmes mécaniques et encore moins sa simulation numérique. La préoccupation première de la réflexion des concepteurs vise à définir et à retenir les solutions de principe qui sont par la suite étudiées plus en détails.

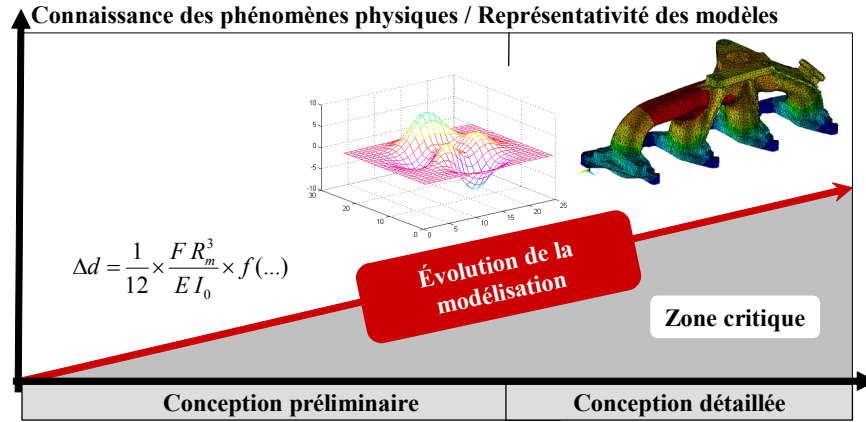


FIG. 6.11 – Evolution de la connaissance des phénomènes et de leur modélisation.

En revanche dès la fin de la conception conceptuelle et dès les premières itérations de la conception préliminaire, nous pouvons et nous devons bénéficier des premières représentations mathématiques des comportements physiques des systèmes ou de leur physique de défaillance. La prise en compte des phénomènes bien connus ne pose généralement pas de problème puisqu'il existe généralement des modèles d'ordre 1 (modèle analytique simplifié) assurant leur caractérisation. Lorsque l'on a affaire à des phénomènes peu connus pour lesquels on ne dispose pas de représentation mathématique adéquate, alors il est indispensable d'en développer un premier modèle de type heuristique. A l'inverse, il est possible que l'on maîtrise parfaitement certains phénomènes ou comportements pour la simple et bonne raison que nous les avons déjà rencontrés et analysés dans le cadre de la conception d'autres systèmes mécaniques. Par conséquent, nous disposons éventuellement de représentations fines mais complexes, de type éléments finis par exemple. Nous suggérons alors la construction de versions simplifiées plus rapides d'évaluation et exploitables dès les premières étapes de la conception préliminaire. Dans ces deux cas de figure, nous proposons de mettre en œuvre une procédure générique de construction de métamodèles que l'on explicite ci-après.

La conception détaillée doit quant à elle reposer sur des modèles de plus en plus représentatifs et prédictifs, profitant de l'ensemble de la connaissance et de l'information agrégé au cours des différentes boucles de conception par la réalisation d'essais de caractérisation et le développement de la connaissance experte.

La figure 6.11 illustre cette évolution potentielle de la modélisation de la physique, en fonction de la connaissance disponible au cours des phases de conception préliminaire et de conception détaillée de systèmes mécaniques. Nous remarquons l'existence d'une zone critique à éviter, pour laquelle la représentativité des modèles et leur caractère prédictif sont insuffisants si l'on considère l'état d'avancement de la conception. Dans la suite de cette section et surtout dans le chapitre 8, nous montrons comment l'analyse de fiabilité que l'on propose permet d'identifier les phénomènes dont les modèles nécessitent une amélioration et donc de piloter les actions visant à les faire évoluer.

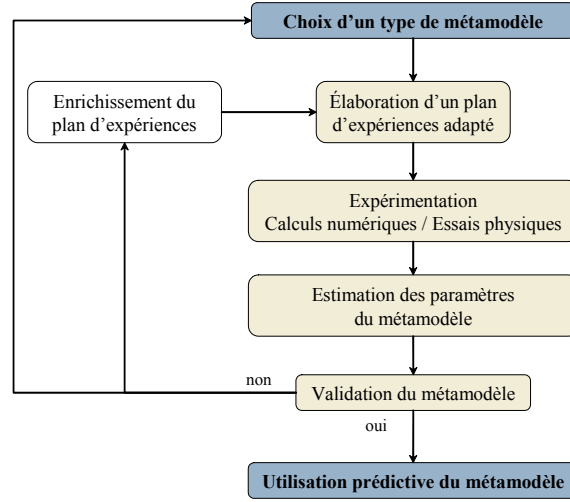


FIG. 6.12 – Processus générique de construction d'un métamodèle.

### 6.3.2 Concept et techniques classiques de métamodélisation

#### Principe de métamodélisation

Dans le cadre de la méthodologie générale que nous proposons, nous encourageons l'utilisation intensive des techniques de métamodélisation [Bar94, Lav03]. Elles permettent l'obtention de *modèles de modèles* (autrement dit des modèles statistiques) moins gourmands en ressources calculs mais conservant une bonne capacité prédictive. Elles encouragent également les acteurs de la conception fiable à exploiter des représentations mathématiques de la physique de défaillance au plus tôt dans l'activité de conception, à ne pas attendre les ultimes itérations de la conception détaillée pour en tirer avantage.

L'approche habituelle de la métamodélisation est illustrée dans la figure 6.12. Elle nécessite d'abord le choix d'un type de métamodèle. Elle est ensuite basée sur l'application d'un plan d'expériences [Sch98, MGH03] (numériques ou physiques) destiné à identifier un ensemble de combinaisons des données d'entrée couvrant au mieux leurs intervalles de variation. Elle profite, ainsi, de techniques d'ajustement classiques pour assurer au mieux l'estimation des paramètres du métamodèle retenu. Finalement, après une étape de validation qui peut aboutir à l'enrichissement du plan d'expériences initial comme à la sélection d'un autre type de représentation, le métamodèle peut être exploité à des fins prédictives.

En fait, si l'on considère un phénomène physique identifié en un nœud quelconque  $k$  de niveau  $l$  d'un scénario de défaillance phénoménologique, il peut être idéalisé mathématiquement par un opérateur de référence  $M_k^{(l)}$  de telle sorte que pour toute réalisation  $\mathbf{x}$  des paramètres l'influçant, sa manifestation  $y$  s'écrit sous la forme :

$$y = M_k^{(l)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{M_k^{(l)}}) \quad (6.20)$$



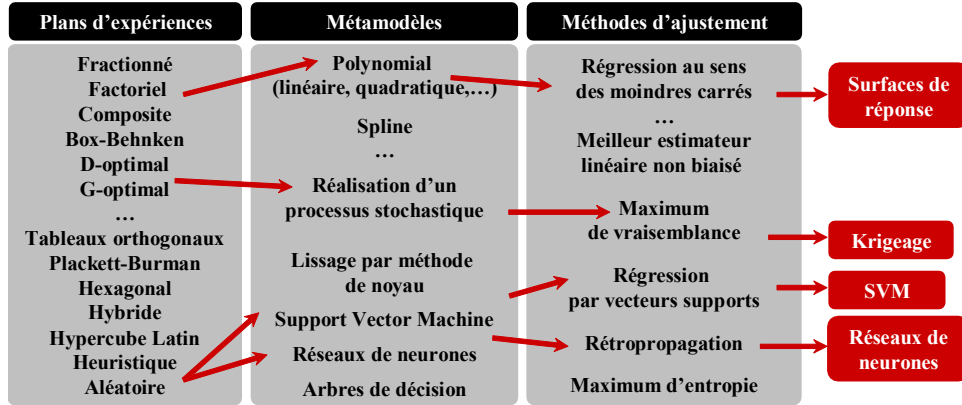


FIG. 6.13 – Aperçu des techniques classiques de métamodélisation.

où  $\theta_{M_k^{(l)}}$  est un vecteur de paramètres de  $M_k^{(l)}$ . Un métamodèle est une version simplifiée de  $M_k^{(l)}$ . Il est défini de manière similaire par :

$$\hat{y} = \hat{M}_k^{(l)}(\mathbf{x}, \theta_{M_k^{(l)}}) \quad (6.21)$$

si bien que la réponse de référence s'écrit alors :

$$y = \hat{y} + \varepsilon \quad (6.22)$$

où  $\varepsilon$  représente simplement l'écart entre la réponse fournie par le modèle simplifié et la réponse physique réelle. Dans le cas d'un modèle de simulation numérique,  $\varepsilon$  ne reflète que les écarts dus aux hypothèses et à la nature de la modélisation. Dans le cas où  $\hat{y}$  traduit un phénomène physique approché à partir de la seule donnée de résultats d'essais,  $\varepsilon$  intègre à la fois les écarts de modélisation et les incertitudes liées aux méthodes de mesure et à la réalisation des essais.

### Quelques techniques classiques de métamodélisation

Nous explicitons ici quelques unes des techniques couramment utilisées au cours des différentes étapes du processus de métamodélisation, sans chercher à rentrer dans les détails et sans prétendre être exhaustif.

**Types de métamodèles.** Les métamodèles les plus répandus demeurent les surfaces de réponse polynomiales classiques [MM95]. Ils s'expriment sous la forme :

$$\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \sum_{k=1}^m \hat{\theta}_k x_k + \sum_{k=1}^m \hat{\theta}_{kk} x_k^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \hat{\theta}_{kl} x_k x_l \quad (6.23)$$

Une première généralisation repose sur les techniques de régression multivariées par splines adaptatives (*Multivariate Adaptation Regression Splines - MARS* [Fri91]).  $\hat{y}$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^n \hat{\theta}_k \phi_k(\mathbf{x}) \quad (6.24)$$

où les  $\phi_k(\mathbf{x})$  sont les fonctions de base définies de façon générale par :

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{m_k} [s_{j,k}(x_{v(j,k)}) - t_{j,k}]^2 \quad (6.25)$$

avec :

- $m_k$ , le nombre de paramètres dans la  $j$ -ième fonction de base,
- $q$ , un paramètre choisi arbitrairement,
- $s_{j,k} = \pm 1$ ,
- $x_{v(j,k)}$ , la  $v$ -ième variable telle que  $1 \leq v(j,k) \leq m$ ,
- $t_{j,k}$ , la position du nœud  $j$  pour chaque variable  $x_k$  correspondante.

A noter qu'une variante de ces courbes *MARS* est obtenue en sélectionnant des fonctions de bases  $\phi_k(\mathbf{x})$  radiales ou *Radial Basis Functions (RBF)* [DLR86, Pow87].

Les réseaux de neurones [DMS<sup>+</sup>04] sont également très utilisés pour leur excellente capacité à approcher des phénomènes et autres comportements non linéaires. Sans rentrer dans le détail de leur structure, ils assurent l'obtention analytique de  $\hat{y}$ . Par exemple, dans le cas d'un réseau défini par  $m$  entrées variables plus un biais, d'une unique couche intermédiaire de  $N_c$  neurones et d'un neurone de sortie linéaire,  $\hat{y}$  s'écrit :

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{N_c} \hat{\theta}_{N_c+1,i} f \left( \sum_{j=1}^{m-1} \hat{\theta}_{i,j} x_j + \hat{\theta}_{i,0} \right) + \sum_{j=1}^{m-1} \hat{\theta}_{i,j} x_j + \hat{\theta}_{N_c+1,0} \quad (6.26)$$

où  $f(\cdot)$  correspond à la fonction d'activation des  $N_c$  neurones du réseau (*e.g.* sigmoïdes, *RBF*) et  $\theta_{i,j}$  sont les paramètres à identifier. A noter que leurs cousins, les *support vector machines - SVM* [Wan05] suscitent un intérêt grandissant dans le monde de la métamodélisation [CGS05], ils font l'objet d'une attention récente toute particulière dans le cadre de la fiabilité des structures mécaniques [Hur04, DL06].

Enfin, il existe aussi les modèles de Krigeage<sup>4</sup> [Sas02] qui diffèrent sensiblement des modèles régressifs précédents dans le sens où la réponse idéale  $y$  est exprimée sous la forme :

$$y = \hat{y} + Z(\mathbf{x}) \quad (6.27)$$

où  $\hat{y}$  est, en général, un polynôme de  $\mathbf{x}$  et  $Z(\mathbf{x})$  est la réalisation d'un processus aléatoire. Ceci revient en fait à considérer que les écarts entre les différents points du modèle ne sont plus indépendants mais corrélés spatialement. Contrairement aux modèles régressifs, l'information déterminante du modèle ne se trouve pas dans la partie  $\hat{y}$  mais dans la partie stochastique  $Z(\mathbf{x})$  :  $\hat{y}$  approche globalement la réponse et  $Z(\mathbf{x})$  l'approche localement.

Un état de l'art très complet des méthodes de modélisation est fourni dans [SPKA01]. La figure 6.13 illustre quelques unes des techniques possibles, en soulignant par ailleurs

<sup>4</sup>Technique développée dans le courant des années 50 par D.G. Krige (d'où le nom de Krigeage), un ingénieur minier sud-africain.

celles qui ont récemment été exploitées dans le cadre d'analyses de fiabilité physiques : les surfaces de réponse polynomiales [GBL03], les modèles de krigeage [SVG05], les réseaux de neurones [GA04] ou encore les *support vector machines (SVM)* [DL06].

**Plans d'expériences.** En ingénierie, afin de comprendre le rôle et d'identifier le poids de différents paramètres sur le comportement d'un système, on réalise traditionnellement des analyses paramétriques. Celles-ci consistent à découpler les variables pour n'en faire évoluer qu'une seule et observer les effets de ses variations sur la réponse du système. Pour des systèmes ou des phénomènes physiques soumis à de nombreux paramètres, le nombre d'essais (physiques ou numériques) croît alors très rapidement (fonction puissance du nombre de variables). Les plans d'expériences constituent une technique qui permet de limiter le nombres d'épreuves à réaliser tout en assurant encore la possibilité de caractériser l'influence globale des paramètres d'entrée et de leurs interactions. Ils fournissent un ensemble de configurations judicieusement choisies des paramètres à l'origine du phénomène considéré. Elles correspondent à de multiples combinaisons de valeurs des paramètres d'entrée (appelées niveaux) censées couvrir au mieux leur espace de variation. La mise en œuvre des essais et l'analyse de leurs résultats à partir d'expériences ainsi définies assurent la construction d'une base de données  $\{y_1, y_2, \dots\}$ . Celle-ci sert de référence (de base d'apprentissage) pour l'estimation des paramètres  $\theta_{\hat{M}_k^{(l)}}$  des métamodèles et la finalisation de leur construction. Le choix d'un plan d'expériences n'est généralement pas indépendant du type de métamodèle que l'on souhaite développer. Il ne l'est pas, non plus, du budget alloué à la réalisation des différents essais. La qualité d'un métamodèle peut de ce fait varier de façon significative selon les ressources disponibles.

Parmi les plans d'expériences classiques et usuellement exploités, nous distinguons par exemple (il en existe de nombreux autres [BHH05, Tag87]) :

- Les plans factoriels, particulièrement adaptés aux métamodèles polynomiaux. Les points d'échantillonnage sont choisis de façon à minimiser la variance de l'estimation des coefficients des métamodèles. Ils ont donc tendance à être disposés aux frontières de l'espace de variations des paramètres influençant les phénomènes considérés. Ils se déclinent sous différentes formes plus ou moins complètes :
  - Les plus basiques sont les plans factoriels complets. A chaque niveau  $k$  d'un paramètre sont associés tous les niveaux des autres. Le nombre total d'expériences est donc le produit du nombre de niveaux pour chaque facteur (pour  $m$  paramètres possédant chacun  $k$  niveaux, celui-ci est égal à  $m^k$ ). Ce genre de plan d'expériences donne une très bonne vision de l'espace de conception, mais le nombre d'expériences croît exponentiellement avec le nombre de variables d'entrée (à noter que  $m$  est bien souvent pris égal à 3).
  - Les plans factoriels fractionnaires sont alternativement utilisés lorsque les expériences sont coûteuses ou qu'il y a trop de facteurs, mais ils s'accompagnent d'une perte d'information. Au lieu de définir  $k^m$  expériences, on n'en définit que  $k^{m-p}$ . Certaines interactions entre paramètres peuvent être identifiées sous l'hypothèse que les contributions d'ordres élevés sont négligeables.
  - Les plans orthogonaux développés par Tagushi, sont des plans fractionnaires

minimum construits pour condenser l'information contenue dans les réalisations correspondantes du phénomène physique étudié. Par exemple, ils permettent d'identifier l'influence de 3, 11, ou 15 facteurs avec respectivement 4, 12 ou 16 expériences. En revanche, ils ne sont généralement pas suffisants lorsque l'objectif principal est la construction d'un métamodèle prédictif.

- Les plans de type central-composite sont adaptés à la caractérisation des effets quadratiques. Ils se substituent aux plans  $k^m$  ou  $k^{m-p}$  qui requièrent souvent la réalisation d'un nombre d'expériences trop important. En fait, ce sont des plans  $2^k$  ou  $2^{k-p}$  augmentés de  $k$  points centraux et de  $2k$  points dits étoiles situés de part et d'autre des points centraux. Chaque paramètre est donc évalué à 5 niveaux.
- Les plans privilégiant une répartition des configurations des paramètres d'entrée sur l'ensemble de leur espace de variation (*i.e.* sur l'ensemble de l'espace de conception s'il s'agit effectivement de paramètres de conception). Par exemple, le plan de type latin hypercube possède cette propriété. D'une manière générale, ces plans d'expériences sont particulièrement appropriés aux modèles non polynomiaux et non linéaires par rapport aux paramètres.

**Estimation des paramètres des métamodèles.** Une fois le choix du type de métamodèle réalisé et l'échantillon d'apprentissage  $\{y_1, y_2, \dots\}$  acquis, il reste à déterminer le vecteur  $\hat{\theta}_{\hat{M}_k^{(l)}}$  de ces paramètres. Classiquement, les paramètres  $\hat{\theta}_{\hat{M}_k^{(l)}}$  sont estimés par une méthode d'ajustement du type régression au sens des moindres carrés ou exploitant le principe de maximum de vraisemblance introduit dans la section précédente.

**Validation.** L'étape de validation est fondamentale. Elle permet de s'assurer de la qualité du modèle et de sa capacité à bien représenter la physique.

Une première approche peut consister à analyser graphiquement les écarts entre les réponses  $y$  et  $\hat{y}$  au moyen d'un diagramme  $(y_i, \hat{y}_i)$ . Si le modèle est "parfait", les couples  $(y_i, \hat{y}_i)$  forment une droite :  $y_i = \hat{y}_i$ . Sinon, il est généralement possible de conclure sur les tendances du métamodèle à surestimer ou à sous-estimer la réponse physique réelle.

L'approche plus formelle et plus robuste de la validation repose sur l'analyse des résidus, *i.e.* des écarts observés entre les valeurs de chaque couple  $(y_i, \hat{y}_i)$ . Celle-ci nécessite la donnée d'un échantillon de validation  $\{y'_1, y'_2, \dots\}$ , différent de l'échantillon d'apprentissage  $\{y_1, y_2, \dots\}$ . Soient :

- $\{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_{n_{val}}\}$  l'échantillon de validation de taille  $n_{val}$ ,
- $\{y'_1, y'_2, \dots, y'_{n_{val}}\}$  les réponses physiques associées,
- $\mu(\mathbf{y}')$  la moyenne de ces réponses et  $\sigma(\mathbf{y}')$  leur écart-type,
- $\{\hat{y}'_1, \hat{y}'_2, \dots, \hat{y}'_{n_{val}}\}$  les réponses associées issues du modèle de calcul.

Le résidu  $R^2$  donne une première mesure d'adéquation, il est défini par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2(\mathbf{y}' - \hat{\mathbf{y}}')}{\sigma^2(\mathbf{y}')} = 1 - \frac{\sum_i (y'_i - \hat{y}'_i)^2}{\sum_i (y'_i - \mu(\mathbf{y}'))^2} \quad (6.28)$$

Plus  $R^2$  est proche de 1, meilleur est le modèle. Plus  $R^2$  est proche de 0, plus le modèle est mauvais.

Pour mesurer la précision globale du modèle, il est aussi possible de calculer :

- la racine de la moyenne des carrés des écarts, notée  $RMSE$  :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (y'_i - \hat{y}'_i)^2} \quad (6.29)$$

Elle est d'autant plus fine que la quantité  $RMSE$  est faible.

- la moyenne de la valeur absolue des écarts, notée  $MAE$  :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_i |y'_i - \hat{y}'_i| \quad (6.30)$$

Une faible valeur de  $MAE$  indique que le modèle est précis.

- la valeur maximale de la valeur absolue des écarts, notée  $MAX$  :

$$MAX = \max_i |y'_i - \hat{y}'_i| \quad (6.31)$$

Une faible valeur de  $MAX$  indique que le modèle est bon partout. Une forte valeur de  $MAX$  souligne qu'il y a au moins une région de l'espace pour laquelle le métamodèle est peu prédictif, en revanche elle ne renseigne en rien sur sa précision globale.

### 6.3.3 Indice de représentativité des modèles physiques

L'ensemble de la réflexion que nous avons mené jusqu'à présent, sur la modélisation des comportements physiques et des performances, suscite la question fondamentale de sa représentativité et de son exploitation dans une démarche de prédiction de la fiabilité de systèmes mécaniques. Notre principal argument est le suivant : en tirant tout le meilleur des techniques de métamodélisation, nous sommes en mesure de travailler avec les modèles de lois de comportement les plus pertinents à chaque étape du processus de conception des systèmes mécaniques. C'est-à-dire :

- les plus appropriés au regard de notre connaissance des phénomènes et des comportements physiques considérés,
- les plus adaptés au regard de ce que l'on souhaite démontrer par la mise en œuvre ultérieure du traitement fiabiliste du modèle global de défaillance que nous développons.

A ce sujet, dans le contexte de la construction évolutive des scénarios de défaillance phénoménologiques que nous développons (Chapitre 5), il n'y a aucune raison pour que la précision de chaque modèle physique nodal  $M_k^{(l)}$ ,  $k = 1, \dots, N_{c1}$  et  $l = 1, \dots, TE$  soit homogène avant les itérations finales de la conception détaillée. Autrement dit, un ou plusieurs nœuds peuvent bénéficier d'une modélisation précise reposant sur un code de calcul complexe alors que d'autres ne reposent que sur des métamodèles beaucoup moins fins. Nous cherchons simplement à optimiser la paire "précision du calcul - temps d'évaluation" et nous réservons l'exploitation des modèles les plus fins et les plus complexes à la phase de conception détaillée.

La faible précision de l'estimation du niveau de fiabilité, qui pourrait résulter de l'évaluation d'un tel modèle évolutif lors des premières itérations de la conception préliminaire, importe peu (dès lors qu'on en est conscient). Au cours de ces étapes préliminaires, il est plus important d'identifier l'influence des choix de conception et le poids des différents phénomènes physiques sur son évolution potentielle. Il est donc crucial de pouvoir tirer avantage de ces informations pour affiner les choix de conception ainsi que la modélisation au fur et à mesure que l'on progresse dans le processus de conception. Par conséquent, à l'instar du facteur de représentativité défini auparavant au niveau de la modélisation probabiliste des paramètres de conception, la représentativité de la connaissance et de l'information utilisées pour modéliser la physique de défaillance est prise en compte au moyen d'un critère qualitatif puis intégrée dans la procédure de traitement fiabiliste proposée. Plus précisément, les paramètres  $\hat{\theta}_{\hat{M}_k^{(l)}}$  des métamodèles et l'écart de leur prévision à la réponse physique réelle  $\varepsilon$  sont aussi incorporés dans l'analyse de fiabilité et de sa sensibilité. Il en résulte que nous sommes capables de capturer leur influence sur le comportement physique nodal et général du système ainsi que leur poids sur sa fiabilité. S'il apparaît que leur importance est significative alors, dans la mesure où la représentativité du modèle correspondant n'est pas optimale, nous définissons des actions visant à mettre à jour la représentation mathématique de la physique. L'impact de la qualité de la modélisation des comportements physiques sur la fiabilité estimée est ainsi contrôlé (Chapitre 8). Les maillons faibles sont donc exhibés et des actions visant à améliorer leur capacité prédictive, toujours au juste nécessaire, sont définies.

Ceci étant, et bien que les techniques de modélisation permettent généralement l'estimation de l'écart du métamodèle (mesuré statistiquement par  $\varepsilon$ ) avec la représentation de référence du phénomène, nous ne prenons pas véritablement en compte de manière optimale les incertitudes de modèle (en particulier lorsqu'on n'a pas de véritable modèle de référence sous la main). Au mieux, sommes-nous capables de les intégrer par le biais de méthodes probabilistes paramétriques bien souvent peu efficaces. Nous en sommes conscients et nous inscrivons dès à présent cette amélioration potentielle de notre démarche dans la liste des perspectives et des voies de progrès. A notre décharge, le traitement des incertitudes de modèle constitue aujourd'hui un axe de recherche à part entière. Les résultats de Soize à ce sujet [Soi05], très critiques en ce qui concerne les approches paramétriques, incitent l'utilisation de méthodes probabilistes non paramétriques beaucoup plus complexes et d'application encore limitée.

### 6.3.4 Exemple : phénomènes de remplissage et de combustion

Il est ici plus délicat de présenter en détail les résultats relatifs à la procédure de modélisation évolutive des divers phénomènes ou comportements physiques examinés dans le cadre de notre exemple conducteur étant donné qu'ils relèvent de l'expertise métier Renault (Fig. 3.4 Chapitre 3). Nous nous limitons à la donnée d'informations qualitatives macroscopiques.

Trois des étapes successives de la modélisation des phénomènes de remplissage et de combustion sont respectivement explicitées dans les tableaux 6.2 et 6.3. Dans les deux cas, nous exploitons d'abord des règles métiers génériques formalisées à travers des modèles analytiques d'ordre 1. Ensuite sur la base de modèles de calcul complexes

Modèle initial	Métamodèle intermédiaire	Modèle intermédiaire affiné
Modèle d'expertise analytique	Surface de réponse polynomiale complète Plan d'expériences : central composite	Code de calcul 1D <i>GT Power</i> <sup>®</sup> [GTI06]

TAB. 6.2 – Evolution de la modélisation du phénomène de remplissage.

Modèle initial	Métamodèle intermédiaire	Modèle final
Modèle d'expertise analytique	Surface de réponse polynomiale incomplète Plan d'expériences : factoriel fractionnaire	Code de calcul 3D <i>StarCD</i> <sup>®</sup> [Ada06]

TAB. 6.3 – Evolution de la modélisation du phénomène de combustion.

reposant sur l'appel à des codes de calcul 1D ou 3D peu économiques en temps de calcul, nous développons des métamodèles se matérialisant sous la forme de surfaces de réponse plus ou moins fines. Enfin, nous réservons l'utilisation des codes de calcul les plus représentatifs pour les étapes ultimes de la conception détaillée.

### 6.3.5 Conclusion

Nous avons souligné la problématique de la modélisation évolutive des phénomènes physiques  $M_k^{(l)}$  et des performances  $G_k^{(l)}$  identifiés aux différents nœuds des scénarios de défaillance phénoménologiques. Nous avons formulé une première réponse qui consiste à tirer avantage de techniques de métamodélisation dont la mise en œuvre générique et les méthodes les plus efficaces ont été rappelées. Les intérêts majeurs de la procédure que nous proposons pour l'intégration de la physique en chaque nœud des scénarios de défaillance phénoménologiques sont les suivants :

- La précision de chaque modèle nodal est adaptée en fonction de la connaissance disponible sur le phénomène physique associé et du niveau d'exigence des réponses attendues en terme de fiabilité.
- La représentativité de la modélisation de chaque phénomène physique, sachant l'information et l'expertise disponibles, est caractérisée. Elle sera prise en compte ultérieurement au moment de l'interprétation fiabiliste des scénarios physico-probabilistes de défaillance que nous construisons.

La modélisation spécifique des phénomènes de dégradation mécanique, c'est-à-dire la représentation des manifestations physiques s'accompagnant d'une diminution des performances du système mécanique au cours du temps, n'a pas été abordée de manière spécifique dans le cadre de ce chapitre. Cependant, nous précisons que son intégration en différents nœuds des scénarios de défaillance proposés, ne pose aucun problème *a priori*. Dans la littérature, on distingue essentiellement les modèles physiques (*e.g.* basés sur la notion de cinétique de dégradation [Lan04, LP05]), des modèles statistiques de dégradation (*e.g.* par processus de choc, par processus gamma [BN02]). A ce stade, ils ont simplement pour effet d'introduire le temps comme paramètre élémentaire sup-

plémentaire du modèle global. En fait, ils impactent plus les méthodes de calcul de la fiabilité, ce que nous précisons dans les chapitres suivants.

## **6.4 Conclusion du chapitre**

### **6.4.1 Synthèse**

Nous avons présenté les méthodes que nous utilisons pour intégrer, aux représentations structurelles des scénarios de défaillance phénoménologiques, les modèles numériques évolutifs :

- des incertitudes de caractérisation des paramètres élémentaires de conception ;
- du comportement et de la physique de défaillance des systèmes considérés.

Une représentation probabiliste des paramètres de conception est adoptée. Sa capacité de mise à jour par actualisation Bayésienne de la connaissance disponible est démontrée. Les différents aspects de la procédure de modélisation probabiliste que l'on utilise ont été explicités. La modélisation des phénomènes physiques et des performances identifiés aux différents nœuds des scénarios profite des techniques de métamodélisation. Sa précision est adaptée en fonction de la connaissance et du niveau d'exigence des réponses attendues. Nous avons, ici aussi, introduit les principales étapes du processus générique sur lequel elle repose dans le cadre de l'approche suggérée.

A la suite de ce chapitre, nous disposons d'un modèle de simulation numérique, à la fois logique, physique et probabiliste, des scénarios de défaillance d'un système mécanique. La définition de critères de performance et des fonctions d'états limites permet d'identifier les configurations dégradées ou défaillantes du système considéré.

### **6.4.2 Perspectives**

D'une manière générale, l'approche proposée exige une analyse de plus en plus fine des données ainsi que la formalisation toujours plus précise du savoir-faire et de l'expertise des spécialistes de la physique. Autrement dit, les perspectives de développement que nous identifions relèvent essentiellement de :

- la nécessité de mieux faire parler les données sur les paramètres élémentaires de conception, que ce soit à partir d'échantillons de taille réduite et qu'à partir de l'actualisation *a posteriori* sachant toute nouvelle information exploitable. Une voie de progrès possible consiste à poursuivre l'exploitation de l'information issue du retour d'expérience, qu'il soit issu de résultats d'essais, du jugement d'experts ou encore de données du terrain.
- l'implémentation de nouvelles méthodes pour la prise en compte efficace et la maîtrise des écarts entre la modélisation et la réalité physique. Les modèles physiques doivent devenir de plus en plus précis, d'autant que l'analyse de fiabilité s'intéresse à des événements éloignés des conditions de fonctionnement nominales. Lorsque la connaissance des phénomènes physiques est insuffisante, le mécanicien doit quand même pouvoir apporter une réponse pour la construction d'un modèle qui ne résulte alors que de l'expertise : la voie de la métamodélisation semble être à privilégier.



Finalement, en particulier dans un contexte industriel, la capitalisation de la connaissance, aussi bien sur la caractérisation des paramètres élémentaires de défaillance que sur les lois de comportement physique, doit être systématisée et améliorée.

## Chapitre 7

# Méthodologie de propagation de l'aléa et des incertitudes

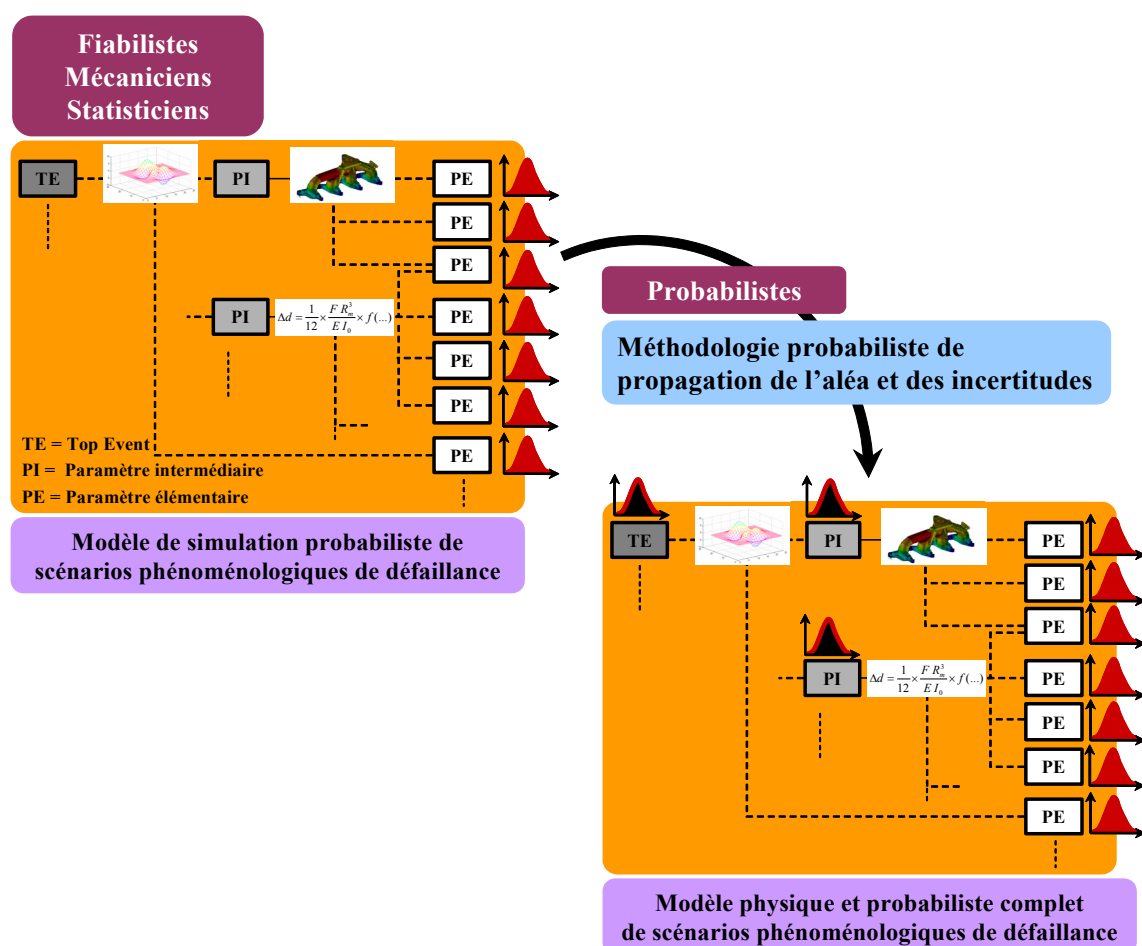


FIG. 7.1 – Construction d'un modèle de fiabilité système, physique et probabiliste.

## 7.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de définir dans le détail la procédure probabiliste assurant la propagation de l'aléa sur les paramètres de conception au sein des scénarios de défaillance phénoménologiques mis en place dans les chapitres 5 et 6 (Fig. 7.1). Sa finalité est de contrôler l'aléa sur la réalisation de la physique de défaillance de systèmes mécaniques.

### 7.1.1 Problématique

A partir de la définition probabiliste du vecteur  $\mathbf{X}^{(0)}$  des paramètres élémentaires de défaillance, il s'agit d'évaluer les propriétés statistiques et la fonction de densité de probabilité  $f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  de chaque paramètre  $X_k^{(l)}$  identifié en sortie des nœuds  $M_k^{(l)}$  ( $k = 1, \dots, nva_l$  et  $l = 1, \dots, TE$ ) de scénarios de défaillance phénoménologiques. Autrement dit, nous sommes amenés à réaliser des analyses de sensibilité en chacun de leur nœud.

Outre le fait que le problème de l'approximation d'une variable aléatoire issue d'une transformation quelconque de variables aléatoires n'ait pas de solution générale, la spécificité de l'approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité que nous suggérons impose le franchissement d'obstacles supplémentaires. Plus précisément, le challenge consiste à mettre en place une démarche simple assurant :

1. l'identification de la loi de probabilité de l'ensemble des variables  $X_k^{(l)}$  quelle que soit la complexité des représentations mathématiques  $M_k^{(l)}$  des phénomènes physiques correspondants (formules analytiques, métamodèles ou appels à un code éléments finis).
2. la détermination de la matrice de corrélation  $\rho^{(l)}$  des éléments du vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$  à chaque niveau  $l$  des scénarios de défaillance.
3. la réutilisation de l'approximation du comportement stochastique des variables du vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$  de niveau  $l$  pour la caractérisation des variables du vecteur  $\mathbf{X}^{(l+1)}$  de niveau immédiatement supérieur et pour la réalisation d'analyses de fiabilité originales (Chapitre 8).

Autrement dit, il est indispensable d'avoir recours à des méthodes assurant un très bon compromis entre économie en terme d'appels aux différents codes de calcul (afin de limiter au maximum le temps nécessaire à l'évaluation du modèle global de fiabilité) et précision de l'approximation.

### 7.1.2 Synthèse de l'état de l'art

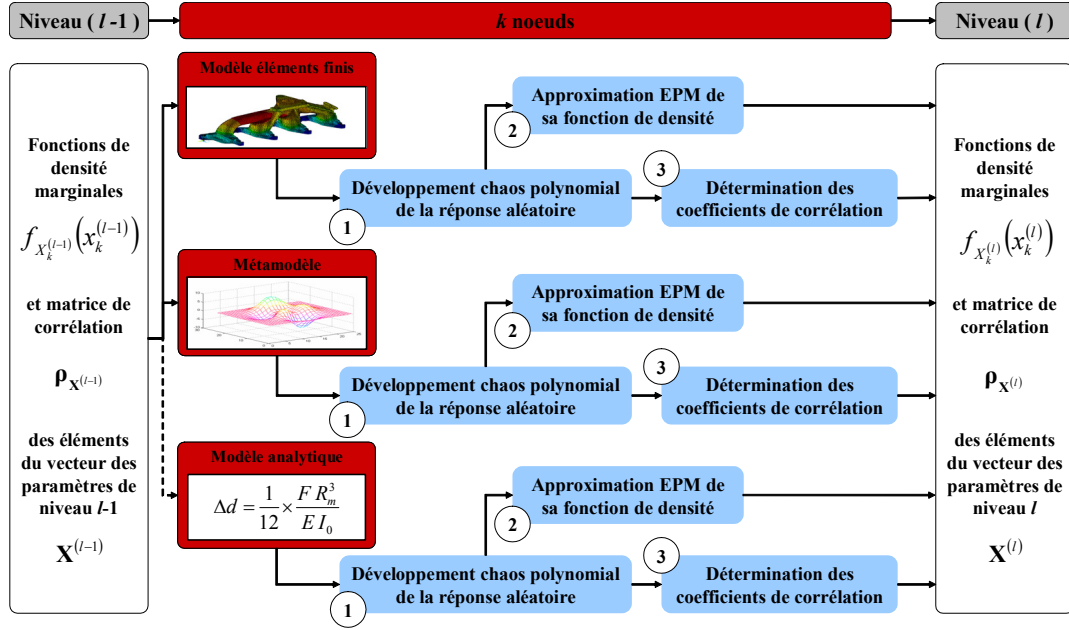
L'approximation des fonctions de densité de probabilité de variables aléatoires quelconques reste un problème ouvert. L'identification exacte de loi de probabilité d'une variable aléatoire résultant d'une transformation de variables aléatoires est malheureusement impossible dans la plupart des cas. Cependant lorsque les combinaisons des variables sont simples (*e.g.* combinaisons linéaires de Gaussiennes, combinaisons produit/quotient de variables log-normales), c'est bien sûr la solution qu'il faut privilégier.

Le recours à des méthodes d'approximation est donc indispensable (Annexe C) :

- La méthode de simulation de Monte Carlo directe permet la représentation de la fonction de densité de probabilité au moyen d'un histogramme qu'il est possible de lisser par des techniques de noyaux [WJ95].
- La réalisation successive d'analyses de type *FORM/SORM* (Annexe E) n'autorise que la construction point par point de la fonction de densité de probabilité.
- Les méthodes de Pearson et Johnson [PT65, Joh49, SO83] reposent sur le choix d'une fonction parmi des familles de densités paramétriques prédéfinies. La sélection de la "meilleure" fonction de densité au sein de ces familles est gouvernée par un certain nombre de critères, eux-mêmes déterminés par la connaissance des quatre premiers moments de la variable aléatoire examinée.
- Les techniques de Gram-Charlier et de Edgeworth [SO83] utilisent un développement en série de fonctions de la variable aléatoire dont les coefficients sont déterminés au moyen de ses moments successifs.
- Winterstein suggère d'approximer la variable aléatoire par un développement en série de polynômes d'Hermite unidimensionnels d'une variable aléatoire normale centrée normée [Win87]. Les coefficients du développement sont définis à partir des quatre premiers moments de la variable aléatoire.
- Er recommande l'utilisation de la méthode de l'exponentielle d'un polynôme (*EPM*) [Er98]. Cette approche consiste à approximer la densité de probabilité d'une variable aléatoire par une exponentielle d'un polynôme d'ordre à déterminer et dont les coefficients sont évalués sur la base de la connaissance de ses premiers moments.
- Zong et Lam ont développé une méthode exploitant des combinaisons linéaires de fonctions *B-splines* [ZL98, ZL00]. Leurs coefficients sont estimés à partir d'un ensemble quelconque de réalisations de la variable aléatoire. La mise à jour Bayésienne de leur estimation est également suggérée.
- Berveiller *et al.* [BSL04, SBL06] ont récemment proposé l'approximation de variables aléatoires par leur développement sur une base de polynômes de chaos (chaos polynomial) dont les coefficients sont estimés au moyen de méthodes de projection ou de régression. Il s'agit en fait d'extensions de techniques à l'origine introduites dans le domaine de la mécanique aléatoire par Ghanem and Spanos [GS91].

Nous précisons, à toute fin utile, que la liste de méthodes que nous venons de dresser n'est bien entendu pas exhaustive. Nous nous sommes limités au rappel des principales, des plus performantes et des plus adaptées aux particularités de notre problématique.

Dans le cadre de l'annexe C, nous détaillons les principes majeurs de ces différentes approches. Sur la base de notre propre expérience et de celle disponible dans la littérature, nous effectuons également une synthèse de leurs avantages et de leurs inconvénients. Cette démarche est essentielle dans le sens où elle justifie le choix des méthodes que nous considérons comme les plus appropriées à la résolution de notre problème. Au vu des différentes conclusions intermédiaires auxquelles nous sommes arrivés (Annexe C), nous retenons la méthode du développement de variables aléatoires sur le chaos polynomial dont les coefficients sont déterminés par une méthode de régression. Même si elle ne permet pas directement l'obtention d'une expression analytique des fonctions de densité de probabilité, elle se positionne comme la méthode fournissant

FIG. 7.2 – Procédure de passage probabiliste d'un niveau  $l$  au niveau supérieur  $l - 1$ .

l'approximation la plus efficace quelle que soit la nature de la variable aléatoire considérée. Lorsque nous avons besoin d'une expression analytique des fonctions de densité de probabilité alors nous les reconstruisons au moyen de la méthode de l'exponentielle d'un polynôme (EPM). Les moments nécessaires à sa détermination sont calculés à partir de son développement sur la base du chaos polynomial. Sa simplicité de mise en œuvre mais aussi la qualité de ses résultats, nous conduisent à la retenir plutôt qu'une approche par famille de distributions de Pearson ou par la transformation de Winterstein.

### 7.1.3 Schéma synoptique de la procédure proposée

La méthodologie de propagation de l'aléa et des incertitudes au sein de scénarios de défaillance phénoménologiques, que nous proposons, repose sur une procédure de passage d'un niveau  $l - 1$  au niveau supérieur  $l$  s'organisant en trois étapes (Fig. 7.2) :

1. La première consiste, à partir de la donnée du vecteur  $\mathbf{X}^{(l-1)}$  des variables aléatoires de niveau  $l - 1$  et de leur matrice de corrélation  $\rho^{(l-1)}$ , à déterminer l'ensemble des paramètres  $S_{k'}^{(l)}$ ,  $k' = 1, \dots, N_{cl}$  résultant des transformations mécaniques  $M_k^{(l)}$ ,  $k = k' + nva_{l-1}$ . Nous rappelons que le vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$  des variables aléatoires de niveau  $l$  est formé des éléments du vecteur  $\mathbf{X}^{(l-1)}$  auxquels nous ajoutons les nouvelles variables  $S_{k'}^{(l)}$ . Cette opération est réalisée par le développement successif de l'ensemble des  $S_{k'}^{(l)}$  sur une base spécifique de polynômes de chaos dont les coefficients sont déterminés par une méthode de régression.
2. La seconde a pour but de construire l'approximation analytique sous la forme

d'une *EPM* de la fonction de densité de probabilité de chacun des paramètres du vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$ , si elle n'est pas déjà connue. Leur développement chaos polynomial est exploité pour l'estimation des moments nécessaires à la définition de l'*EPM*.

3. La dernière a pour objectif de déterminer la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(l)}$  des éléments du vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$ . Il s'agit de mettre à jour la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(l-1)}$  en estimant les coefficients de corrélation linéaires relatifs aux nouvelles variables  $S_{k'}^{(l)}$  créées au niveau  $l$ . En fait, nous tirons avantage du développement chaos polynomial de l'ensemble des éléments de  $\mathbf{X}^{(l)}$  pour la création d'échantillons homogènes de réalisations de chacun de ses éléments  $X_k^{(l)}$ . Ces derniers font alors l'objet d'un traitement statistique classique visant à estimer les coefficients de corrélation recherchés.

La suite de ce chapitre apporte d'abord des précisions théoriques sur la mise en œuvre de ces trois étapes. Nous illustrons ensuite leur description formelle sur la base de l'analyse des phénomènes successifs de remplissage des cylindres et de la combustion d'un moteur Diesel. Nous isolons donc un aspect particulier de l'exemple conducteur global que nous avons introduit dans le chapitre 3 (Fig. 3.4).

## 7.2 Approximation des $X_k^{(l)}$ par des polynômes de chaos

### 7.2.1 Définition

Soit  $X_k^{(l)}$  la  $k$ -ième variable identifiée au niveau  $l$  de scénarios de défaillance phénoménologiques. Cette variable aléatoire résulte de la transformation mécanique  $M_k^{(l)}$  des  $r$  variables aléatoires du vecteur  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}$ , vecteur réduit issu du vecteur global de variables aléatoires  $\mathbf{X}^{(l-1)}$  de niveau  $l-1$ . Nous considérons d'abord que le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}^{(l-1)}$  est au moins caractérisé par la donnée des fonctions de densité marginales des variables aléatoires  $X_k^{(l-1)}$  et de leur matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(l-1)}$ . Nous faisons ensuite l'hypothèse d'appartenance de la variable  $X_k^{(l)}$  à l'espace Hilbertien des variables aléatoires de variance finie  $\mathcal{L}^2(\Theta, F, P)$ . Des résultats classiques [Mal97] combinés avec des résultats plus récents [SBL06], nous autorisent à développer la variable  $X_k^{(l)}$  sous la forme de la série de fonctions suivante :

$$X_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j \ k,l}^{(l-1)} \Psi_j \left( \check{\boldsymbol{\xi}}_{k,l}^{(l-1)} \right) \quad (7.1)$$

où :

- $\left\{ a_{j \ k,l}^{(l-1)} \right\}_{j=0}^{\infty}$  sont les coefficients du développement de la variable  $X_k^{(l)}$  par rapport au vecteur  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}$  des variables aléatoires de niveau  $l-1$  dont elle dépend ;
- $\Psi_j$  désigne le  $j$ -ième polynôme de base qui n'est autre, dans ce cas, qu'un polynôme d'Hermite multidimensionnel (Annexe D), les  $\{\Psi_j\}_{j=0}^{\infty}$  forment le chaos polynomial ;
- $\check{\boldsymbol{\xi}}_{k,l}^{(l-1)}$  est un vecteur de  $r$  variables aléatoires gaussiennes centrées normées.

Chaque élément  $\check{\xi}_{q\ k,l}^{(l-1)}, q = 1, \dots, r$  du vecteur  $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$  est obtenu par la transformation isoprobabiliste de la variable physique  $\check{X}_{q\ k,l}^{(l-1)}$  correspondante dans l'espace normal. Si les  $r$  éléments du vecteur  $\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(l-1)}$  sont indépendants, cette transformation s'écrit simplement :

$$\check{X}_{q\ k,l}^{(l-1)} \rightarrow \check{\xi}_{q\ k,l}^{(l-1)} : F_{\check{X}_{q\ k,l}^{(l-1)}}(\check{x}_{q\ k,l}^{(l-1)}) = \Phi(\check{\xi}_{q\ k,l}^{(l-1)}) \quad (7.2)$$

où :

- $F_{\check{X}_{q\ k,l}^{(l-1)}}$  désigne la fonction de répartition de probabilité de la variable  $\check{X}_{q\ k,l}^{(l-1)}$ .
- $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type unitaire.

Lorsque les  $r$  variables du vecteur  $\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(l-1)}$  ne sont pas indépendantes la transformation assurant le passage de  $\check{X}_{q\ k,l}^{(l-1)}$  à  $\check{\xi}_{q\ k,l}^{(l-1)}$  n'est pas aussi directe. Elle requiert l'utilisation supplémentaire de la transformation de Rosenblatt ou du modèle de distribution multivariée de Nataf (Annexe E section E.2.1).

Dans la pratique, le développement de  $X_k^{(l)}$  (Eq. 7.1) est tronqué et une approximation est alors obtenue sous la forme :

$$X_k^{(l)} \approx \hat{X}_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{P-1} \hat{a}_{j\ k,l}^{(l-1)} \Psi_j(\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}) \quad (7.3)$$

où :

- $\{\hat{a}_{j\ k,l}^{(l-1)}\}_{j=0}^{P-1}$  sont les coefficients du développement dont la détermination représente finalement le point le plus délicat de l'approche.
- $\{\Psi_j\}_{j=0}^{P-1}$  sont les polynômes d'Hermite multidimensionnels d'ordre inférieur ou égal à  $p$ , avec  $p$  l'ordre du chaos polynomial.
- $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$  est le même vecteur de  $r$  variables aléatoires gaussiennes centrées normées que précédemment.
- $r$  est toujours le nombre d'éléments du vecteur  $\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(l-1)}$ , autrement dit, le nombre de paramètres d'entrée de la transformation mécanique  $M_k^{(l)}$ .
- $P$  désigne la taille de la base formée par les polynômes de chaos  $\{\Psi_j\}_{j=0}^{P-1}$ . Elle est donnée par la relation :

$$P = \sum_{i=0}^p \binom{r+i-1}{i} = \frac{(r+i)!}{r!i!} \quad (7.4)$$

### 7.2.2 Méthode de régression

Dans le cadre de la méthodologie de propagation de l'aléa et des incertitudes que nous suggérons, nous procédons à l'estimation des coefficients  $\{\hat{a}_{j\ k,l}^{(l-1)}\}_{j=0}^{P-1}$  au moyen d'une méthode de régression au sens des moindres carrés. Elle a le mérite de ne nécessiter qu'un nombre d'appels déterministes limités au code de calcul permettant l'évaluation de  $M_k^{(l)}$  et donc de sa réponse  $X_k^{(l)}$ . Soit  $\left\{ \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]} \right\}_{i=1}^n$ ,  $n$  réalisations du

vecteur  $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$  de variables aléatoires normales centrées normées. Pour chaque  $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]}$ , la transformation isoprobabiliste 7.2 renvoie la réalisation correspondante du vecteur de variables aléatoires physiques  $\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(l-1)[i]}$ . Par conséquent, la réponse du modèle,  $X_k^{(l)[i]} = M_k^{(l)} \left( \check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(l-1)[i]} \right)$ , peut être évaluée. De manière classique, la méthode de régression que l'on exploite consiste à trouver l'ensemble des coefficients  $\left\{ \hat{a}_j^{(l-1)} \right\}_{j=0}^{P-1}$  minimisant la quantité suivante :

$$\Delta X_k^{(l)} = \sum_{i=1}^n \left[ X_k^{(l)[i]} - \hat{X}_k^{(l)[i]} \right]^2 \quad (7.5)$$

Ce problème de minimisation conduit de manière quasi immédiate à la résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \Psi_0 \Psi_0 & \cdots & \sum_{i=1}^n \Psi_0 \Psi_{P-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1} \Psi_0 & \cdots & \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1} \Psi_{P-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0^{(l-1)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{P-1}^{(l-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_k^{(l)[i]} \Psi_0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_k^{(l)[i]} \Psi_{P-1} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

où :

- $\Psi_j$  est une notation simplifiée de  $\Psi_j \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]} \right)$ .
- la matrice du membre de gauche, de dimension  $P \times P$ , est indépendante de la transformation  $M_k^{(l)}$ . Elle peut, de ce fait, être évaluée une bonne fois pour toute et être réutilisée directement si nécessaire.

Le système d'équations 7.6 se résout généralement au moyen de méthodes usuelles. Il se peut que ce dernier soit parfois mal conditionné ; il est dans ce cas recommandé d'utiliser des méthodes de résolution plus fines telles que la décomposition par valeur singulière [PFTV02] (*SVD - Singular Value Decomposition*) et/ou d'augmenter le nombre  $n$  de points de régression  $\left\{ \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]} \right\}_{i=1}^n$ .

### 7.2.3 Choix du plan d'expériences

En fait, le choix du nombre  $n$  de points de régression et la sélection des différentes combinaisons  $\left\{ \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]} \right\}_{i=1}^n$  constituent bien les aspects les plus critiques de cette approche par développement sur la base des polynômes de chaos. Tout d'abord, pour qu'une solution au système d'équations 7.6 existe, il est important de remarquer qu'il est nécessaire de choisir  $n$  tel que  $n \geq P$ . Ensuite, il s'agit de construire un plan d'expériences efficace, c'est-à-dire celui qui optimise le couple {précision des résultats - taille  $n$  du plan}. De manière générale, il est construit soit de manière aléatoire soit à partir de racines de polynômes d'Hermite.



### Plan d'expériences défini aléatoirement

Le plan d'expériences peut être construit de manière aléatoire à l'aide d'une méthode de Monte Carlo. Il s'agit donc simplement d'effectuer  $n$  tirages du vecteur  $\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$ . Cependant, cela ne fournit jamais un plan d'expériences couvrant de manière homogène l'ensemble de l'espace des réalisations possibles. Il est donc préférable de le construire aléatoirement à partir d'une méthode de type hypercube latin qui assure la sélection de points plus régulièrement répartis dans l'espace [MBC79, OSD03]. En conséquence, elle permet de réduire le nombre  $n$  de points du plan d'expériences par rapport à une méthode de simulation classique.

### Plan d'expériences défini à partir des racines de polynômes d'Hermite

Dans [Isu99, WTM96], la sélection des  $n$  combinaisons  $\left\{ \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]} \right\}_{i=1}^n$  est opérée à partir des  $m$  racines du polynôme d'Hermite d'ordre  $m = p + 1$ , où  $p$  est le degré maximal des polynômes du chaos polynomial. Le système étant de taille  $P$ , il est nécessaire de choisir au moins  $P$  points de régression parmi les  $r$ -uplets contenant toutes les combinaisons des  $m$  racines pour chaque variable  $\left\{ \check{\xi}_{q,k,l}^{(l-1)} \right\}_{q=1}^r$ . A l'origine,  $n = 2(P + 1)$  réalisations sont choisies parmi les  $(p + 1)^r$   $r$ -uplets ayant une plus grande probabilité d'occurrence. Dans notre cas, cela revient à retenir les combinaisons de racines maximisant la fonction de densité de probabilité multinormale :

$$\varphi_r \left( \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]} \right) = 2\pi^{-r/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\| \check{\xi}_{k,l}^{(l-1)[i]} \right\|^2 \right] \quad (7.7)$$

Toutefois, il n'y a aucune règle théorique dans la littérature stipulant le nombre  $n$  idéal de combinaisons à utiliser. Dans [SBL06], une étude paramétrique est conduite pour investiguer l'influence de  $n$  sur la précision des résultats. Une règle empirique consistant à prendre un nombre de points égal à  $(r - 1)$  fois la taille  $P$  du chaos polynomial est définie. Elle fournit des résultats d'une excellente précision, à la fois dans la région centrale et dans les queues des distributions des variables aléatoires examinées. Cependant, il faut rester vigilant quant à sa généralisation pour la simple et bonne raison qu'elle n'a été validée qu'empiriquement sur la base de cas tests dont le nombre  $r$  de variables aléatoires d'entrée demeure limité.

#### 7.2.4 Conclusion

Dans le cadre de la démarche fiabiliste que nous proposons, nous mettons en œuvre cette méthode de type chaos polynomial pour l'approximation des paramètres intermédiaires  $X_k^{(l)}$  des scénarios de défaillance phénoménologiques. Nous utilisons principalement :

- des chaos d'ordre 3 et 4. Le gain de précision mineur réalisé en travaillant avec des chaos polynomiaux d'ordres supérieurs ne justifie pas les efforts supplémentaires de calcul, généralement conséquents, qu'ils nécessitent.
- un plan d'expériences défini à partir des racines de polynômes d'Hermite, ou de préférence suivant un hypercube latin, pour l'estimation des coefficients de leur

développement par la méthode de régression rappelée ci-dessus. La convergence de l'approximation est vérifiée : si elle n'est pas atteinte alors nous ajoutons, de manière incrémentale, de nouveaux points au plan d'expériences initial.

Une fois que l'on dispose de l'approximation de la variable aléatoire  $X_k^{(l)}$  sous la forme donnée par l'équation 7.3, sa fonctions de densité de probabilité  $f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  et sa fonction de répartition de probabilité  $F_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  peuvent être aisément déterminées. En effet, l'implémentation d'une simulation de Monte Carlo ou la réalisation d'analyses *FORM/SORM* (complétées par l'application d'une technique de simulation par tirages d'importance) assurent leur tracé point par point (Annexe C). Le principal handicap de ce type de reconstruction, puisqu'il repose sur des méthodes de simulation, est qu'il n'est pas totalement reproductible : les résultats de l'évaluation répétée d'un point particulier de la densité, même s'ils sont généralement très proches, ne sont jamais identiques. Nous voulons éviter cette situation étant donné que nous réutilisons, par la suite, les fonctions  $f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  et  $F_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  à des fins d'évaluation de diverses mesures de fiabilité diverses (Chapitre 8). Nous préférons donc les obtenir de manière analytique au moyen d'une méthode par exponentielle d'un polynôme (*EPM*).

### 7.3 Densité de probabilité et loi de répartition des $X_k^{(l)}$

#### 7.3.1 Fonction de densité *EPM* des $X_k^{(l)}$

Dans [Er98], il est montré que la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle continue peut s'écrire sous la forme d'une exponentielle d'un polynôme. Dans le cas de la fonction de densité de probabilité d'une variable  $X_k^{(l)}$  d'un scénario de défaillance phénoménologique, celle-ci s'écrit de la manière suivante :

$$f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)}) \approx f_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x) = c_{X_k^{(l)}} \exp[Q(x)] \quad (7.8)$$

où :

- $c_{X_k^{(l)}} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{Q(x)} dx \right]^{-1}$  est une constante de normalisation visant à assurer que  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x) dx = 1$ .
- $Q(x)$  un polynôme tel que :

$$Q(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} a_{EPM_i}^{X_k^{(l)}} x^i & x \in \mathbb{R} \\ -\infty & x \rightarrow \pm\infty \end{cases} \quad (7.9)$$

Dans la pratique, le polynôme  $Q(x)$  est tronqué à l'ordre  $n_{EPM}^{X_k^{(l)}}$  (généralement choisi entre 3 à 6). Le support infini de l'*EPM* est remplacé par les bornes  $\mu_{X_k^{(l)}} \pm k \sigma_{X_k^{(l)}}$ , où  $\mu_{X_k^{(l)}}$  et  $\sigma_{X_k^{(l)}}$  désignent respectivement la moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire  $X_k^{(l)}$  et  $k$  un entier qu'il faut choisir le plus grand possible. L'approximation *EPM* résultante, de la fonction de densité de probabilité de  $X_k^{(l)}$ , est alors donnée par :

$$f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)}) \approx \hat{f}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x) = \hat{c}_{X_k^{(l)}} \exp[\hat{Q}(x)] \quad (7.10)$$

où :

- $\hat{c}_{X_k^{(l)}} = \left[ \int_{\mu_{X_k^{(l)}} - k \sigma_{X_k^{(l)}}}^{\mu_{X_k^{(l)}} + k \sigma_{X_k^{(l)}}} e^{Q(x)} dx \right]^{-1}$  est une constante de normalisation. Son rôle est d'assurer que  $\int_{\mu_{X_k^{(l)}} - k \sigma_{X_k^{(l)}}}^{\mu_{X_k^{(l)}} + k \sigma_{X_k^{(l)}}} \hat{f}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x) dx = 1$ .
- $\hat{Q}(x)$  un polynôme tel que :

$$\hat{Q}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{EPM}^{X_k^{(l)}}} \hat{a}_{EPM_i}^{X_k^{(l)}} x^i & x \in [\mu_{X_k^{(l)}} - k \sigma_{X_k^{(l)}}, \mu_{X_k^{(l)}} + k \sigma_{X_k^{(l)}}] \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.11)$$

L'enjeu consiste donc à estimer les  $n_{EPM}^{X_k^{(l)}}$  coefficients  $\hat{a}_{EPM_i}^{X_k^{(l)}}$  du polynôme  $\hat{Q}(x)$ . Ils sont déterminés au moyen du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\mu'_1 & \dots & m\mu'_{n_{EPM}-1} \\ \mu'_1 & 2\mu'_2 & \dots & m\mu'_m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu'_m & 2\mu'_m & \dots & m\mu'_{2(m-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{EPM_1}^{X_k^{(l)}} \\ \hat{a}_{EPM_2}^{X_k^{(l)}} \\ \vdots \\ \hat{a}_{EPM_m}^{X_k^{(l)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -(m-1)\mu'_{m-2} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

où  $\mu'_i = \int_{\mu_{X_k^{(l)}} - k \sigma_{X_k^{(l)}}}^{\mu_{X_k^{(l)}} + k \sigma_{X_k^{(l)}}} x_k^{(l)i} \hat{f}_{X_k^{(l)}}(x) dx$  est le  $i$ -ième moment de la variable aléatoire  $X_k^{(l)}$  et  $m = n_{EPM}^{X_k^{(l)}}$ . La connaissance des  $2 \left( n_{EPM}^{X_k^{(l)}} - 1 \right)$  premiers moments de la variable  $X_k^{(l)}$  est donc indispensable. Dans la pratique, afin de simplifier les procédures et de limiter les erreurs potentielles de calculs numériques, nous réécrivons le système 7.12 en utilisant les moments de la variable aléatoire  $X_k^{(l)}$  une fois normée et centrée à la place des moments définis précédemment.

### Estimation des moments de $X_k^{(l)}$

La détermination des moments de la variable aléatoire  $X_k^{(l)}$  constitue ainsi l'étape la plus importante de la méthode *EPM*. Nous suggérons de la réaliser à partir de la donnée du développement sur la base d'un chaos polynomial de la variable  $X_k^{(l)}$  (Eq. 7.3). En effet, il s'agit d'une expression analytique bien souvent moins coûteuse en temps de calcul que l'appel à la transformation initiale  $M_k^{(l)}$ .

De manière alternative, nous pouvons utiliser soit une approche par tirages de Monte Carlo soit des méthodes de quadrature.

**Simulation de Monte Carlo.** Dans ce cas, le principe consiste d'abord à procéder à  $n$  tirages du vecteur  $\tilde{\xi}_{k,l}^{(l-1)}$ , puis à effectuer un traitement statistique des réalisations correspondantes de  $\hat{X}_k^{(l)}$  approprié au calcul des moments [Sap90].

De la même manière que pour la construction du plan d'expériences visant à estimer les paramètres du développement chaos polynomial de  $X_k^{(l)}$ , il est possible de tirer profit

d'une méthode de simulation de type hypercube latin qui assure la sélection de points plus régulièrement répartis dans l'espace.

**Quadrature de Gauss.** En remarquant que le calcul des moments statistiques d'une variable aléatoire est en fait l'évaluation d'une intégrale, la méthode d'intégration par quadrature de Gauss est un bon candidat pour son estimation. En notant  $\hat{X}_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{P-1} \hat{a}_{j, k, l}^{(l-1)} \Psi_j \left( \check{\xi}_{k, l}^{(l-1)} \right) = \Upsilon \left( \check{\xi}_{k, l}^{(l-1)} \right)$  et étant donné que les éléments du vecteur  $\check{\xi}_{k, l}^{(l-1)}$  sont des variables aléatoires normales centrées normées non corrélées, le moment d'ordre  $i$  de la variable aléatoire  $\hat{X}_k^{(l)}$  est classiquement défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \hat{X}_k^{(l)i} \right] &= \mathbf{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{P-1} \hat{a}_{j, k, l}^{(l-1)} \Psi_j \left( \check{\xi}_{k, l}^{(l-1)} \right) \right)^i \right] \\ &= \mathbf{E} \left[ \left( \Upsilon \left( \check{\xi}_{k, l}^{(l-1)} \right) \right)^i \right] \\ &= \int \int \dots \int \left( \Upsilon \left( \check{\xi}_{k, l}^{(l-1)} \right) \right)^i \varphi \left( \check{\xi}_{1k, l}^{(l-1)} \right) \dots \varphi \left( \check{\xi}_{rk, l}^{(l-1)} \right) d\check{\xi}_{1k, l}^{(l-1)} \dots d\check{\xi}_{rk, l}^{(l-1)} \end{aligned} \quad (7.13)$$

où  $\varphi(\cdot)$  désigne la fonction de densité de probabilité de la loi normale standard. En appliquant le schéma de quadrature de Gauss [AS70] aux fonctions de poids  $\left\{ \varphi \left( \check{\xi}_{qk, l}^{(l-1)} \right) \right\}_{q=1}^r$ , l'intégrale multiple de la relation 7.13 est approximée au moyen de la somme multiple suivante :

$$\mathbf{E} \left[ \hat{X}_k^{(l)i} \right] \approx \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \dots \sum_{j_r=1}^{N_r} \left( \Upsilon \left( \check{\chi}_{j_1, k, l}^{(l-1)}, \dots, \check{\chi}_{j_r, k, l}^{(l-1)} \right) \right)^i \omega_{j_1, k, l}^{(l-1)} \dots \omega_{j_r, k, l}^{(l-1)} \quad (7.14)$$

où  $\left\{ \omega_{j_q, k, l}^{(l-1)} \right\}_{j_q=1}^{N_q}$  et  $\left\{ \check{\chi}_{j_q, k, l}^{(l-1)} \right\}_{j_q=1}^{N_q}$  sont les poids et les points de Gauss associés aux fonctions de poids  $\left\{ \varphi \left( \check{\xi}_{qk, l}^{(l-1)} \right) \right\}_{q=1}^r$ . En fait, nous remarquons que ces fonctions sont

toutes égales à une seule et même fonction  $\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  pour laquelle les poids et les points de Gauss sont déjà répertoriés dans des tables [AS70].

L'évaluation de la somme multiple 7.14 ne pose donc pas de problème particulier. Elle nécessite seulement le calcul du développement chaos polynomial de la variable  $X_k^{(l)}$  aux  $n = N_1 N_2 \dots N_r$  combinaisons possibles des points de Gauss  $\left\{ \check{\chi}_{j_q, k, l}^{(l-1)} \right\}_{j_q=1}^{N_q}$ ,  $q = 1, \dots, r$ .

De manière alternative aux quadratures de Gauss, il semble aujourd'hui envisageable d'exploiter des schémas de quadrature (ou de cubature) de type Smolyak [Smo63, Kee04]. Ils sont semble-t-il plus séduisants et plus performants car ils réduisent le nombre  $n$  d'évaluations nécessaires de  $\hat{X}_k^{(l)}$ .

### 7.3.2 Fonction de distribution *EPM* des $X_k^{(l)}$

A ce stade, nous disposons d'une expression analytique sous la forme d'une exponentielle d'un polynôme de la fonction de densité de probabilité  $f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  d'une variable  $X_k^{(l)}$ . Nous avons également besoin, principalement pour mener à bien des analyses de fiabilité originales (Chapitre 8), de connaître la fonction de répartition  $F_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  de  $X_k^{(l)}$  et son inverse, notée  $F_{X_k^{(l)}}^{-1}$ .

#### Fonction de répartition de probabilité *EPM* des $X_k^{(l)}$

La fonction de répartition  $F_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  de  $X_k^{(l)}$  s'obtient de manière immédiate en exploitant simplement la définition générale d'une fonction de répartition. De l'approximation *EPM* il vient :

$$\hat{F}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x_k^{(l)}) = \int_{\mu_{X_k^{(l)}} - k \sigma_{X_k^{(l)}}}^{x_k^{(l)}} \hat{f}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(t) dt, \quad \forall x_k^{(l)} \in [\mu_{X_k^{(l)}} - k \sigma_{X_k^{(l)}}, \mu_{X_k^{(l)}} + k \sigma_{X_k^{(l)}}] \quad (7.15)$$

Remarque : la stricte monotonie de la fonction  $\hat{F}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x_k^{(l)})$  se montre assez facilement à partir de la continuité et de la positivité de  $\hat{f}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(t)$ .

#### Inverse de la fonction de distribution de probabilité des $X_k^{(l)}$

Connaissant l'approximation *EPM* (Eq. 7.15) de la fonction de répartition de probabilité  $F_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  de la variable aléatoire  $X_k^{(l)}$  et sa propriété de stricte monotonie, il est possible de déterminer point par point sa fonction de répartition inverse  $F_{X_k^{(l)}}^{-1}$  au moyen d'une procédure numérique classique de recherche de racines. En fait, il suffit de résoudre le problème numérique suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Etant donnée une probabilité } p \in [0, 1] : \\ &\text{trouver } x_k^{(l)} \text{ tel que } p - \hat{F}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x_k^{(l)}) = 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

L'existence d'une solution unique à ce problème de recherche de racines (Eq. 7.16) est assurée par les propriétés de  $\hat{F}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(x_k^{(l)})$ .

### 7.3.3 Conclusion

La mise en œuvre de la méthode de l'exponentielle d'un polynôme (*EPM*), à partir de l'expression chaos polynomial d'une variable aléatoire  $X_k^{(l)}$  d'un scénario de défaillance, permet successivement :

- l'approximation analytique de sa fonction de densité de probabilité  $f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$ ,

- la reconstruction point par point de sa fonction de répartition de probabilité  $F_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$ ,
- la reconstruction point par point de l'inverse de sa fonction de répartition de probabilité  $F_{X_k^{(l)}}^{-1}$ .

Il faut toutefois rester vigilant car la méthode de l'exponentielle d'un polynôme est sensible à la précision et à l'ordre des moments utilisés pour l'approximation. Celle-ci est d'autant plus efficace que la précision sur les moments est bonne et que l'ordre de l'*EPM*,  $n_{EPM}^{X_k^{(l)}}$ , est grand. Parfois, il est difficile d'estimer les moments d'ordre élevé avec précision. Il s'ensuit que la résolution du système linéaire 7.12 peut devenir numériquement instable. Dans la mise en œuvre de la méthodologie, il est donc d'abord nécessaire de veiller à ce que :

- l'ordre de l'*EPM* ne soit ni trop petit (*i.e.*  $\geq 3$ ) ni trop grand (généralement  $\leq 6$ ).
- les procédures de calculs numériques soient simplifiées. Dans ce sens, nous avons opté pour un calcul exploitant les moments de la variable aléatoire centrée et normée plutôt que les moments bruts classiques.
- le support  $[\mu_{X_k^{(l)}} - k \sigma_{X_k^{(l)}}, \mu_{X_k^{(l)}} + k \sigma_{X_k^{(l)}}]$  de l'*EPM* de  $X_k^{(l)}$  soit le plus large possible et soit adapté à la signification physique de la variable  $X_k^{(l)}$ .

Ensuite, il est important de valider les résultats de l'*EPM* au moins en les comparant avec ceux que l'on obtient par simulation du développement chaos polynomial de  $X_k^{(l)}$ .

## 7.4 Matrice de corrélation des éléments du vecteur $\mathbf{X}^{(l)}$

### 7.4.1 Introduction

La dernière étape de la procédure de passage d'un niveau  $l - 1$  des scénarios de défaillance au niveau supérieur  $l$  a pour objectif de déterminer la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(l)}$  des éléments du vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$ . Supposant connue la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(l-1)}$  du vecteur  $\mathbf{X}^{(l-1)}$  de niveau  $l - 1$ , il s'agit de la compléter en estimant les coefficients de corrélation linéaires relatifs aux nouvelles variables  $S_{k'}^{(l)} = X_k^{(l)}$ ,  $k = k' + nva_{l-1}$  créées au niveau  $l$ .

En fait, le coefficient de corrélation est un indicateur adimensionnel quantifiant la qualité de la relation linéaire entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Il est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]}{\sqrt{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] \mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}[Y])^2]}} \quad (7.17)$$

où  $\text{cov}(X, Y)$  est la covariance de  $X$  et  $Y$ ,  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  leurs écarts-types et  $\mathbf{E}[\cdot]$  l'espérance mathématique. Il possède, en outre, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall X, Y \quad \rho(X, Y) &\in [-1, 1] \\ \text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, alors } \rho(X, Y) &= 0 \\ \text{S'il existe une relation linéaire entre } X \text{ et } Y, \text{ alors } \rho(X, Y) &= \pm 1 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Les deux étapes précédentes ont d'abord assuré la détermination du développement des variables aléatoires formant le vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$  de niveau  $l$  sur la base de chaos polynomiaux. Ensuite, à partir de ce dernier, elles ont permis l'approximation *EPM* de leur fonction de densité et de leur fonction de répartition de probabilité. Une fois encore, nous tirons profit du développement chaos polynomial de l'ensemble des éléments de  $\mathbf{X}^{(l)}$  pour l'identification de leur matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(l)}$ .

### 7.4.2 Principes de construction

La matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(0)}$  des paramètres du niveau élémentaire est une donnée du problème. La détermination de la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(1)}$  des éléments du vecteur des paramètres  $\mathbf{X}^{(1)}$  du niveau supérieur n'intervient qu'après avoir déterminé leur développement chaos polynomial et leur fonction de densité de probabilité *EPM*. Le principe d'identification des éléments de  $\boldsymbol{\rho}^{(1)}$  repose alors sur une méthode de simulation se divisant en 4 étapes :

1. Nous construisons, en premier lieu, un échantillon de taille  $n_{corr}$  du vecteur  $\mathbf{X}^{(0)}$  des paramètres de conception constituant le niveau 0 des scénarios de défaillance phénoménologiques. En fait, cet échantillon est dédié à la détermination successive des matrices de corrélation des vecteurs  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(TE)}$ . Il a donc pour vocation d'être propagé au travers de l'ensemble des noeuds et des niveaux des scénarios de défaillance.
2. Nous opérons ensuite la transformation isoprobabiliste, qui à chaque élément de l'échantillon  $\left\{ \mathbf{X}^{(0)[i]} \right\}_{i=1}^{n_{corr}}$ , associe le vecteur  $\boldsymbol{\xi}^{(0)[i]}$  correspondant de variables aléatoires normales centrées normées et non corrélées.
3. La connaissance des réalisations  $\left\{ \boldsymbol{\xi}^{(0)[i]} \right\}_{i=1}^{n_{corr}}$  permet l'identification des réalisations  $\left\{ \boldsymbol{\xi}_{k,1}^{(0)[i]} \right\}_{i=1}^{n_{corr}}$  des vecteurs de données d'entrée propres à chaque développement chaos polynomial déterminant les variables  $X_k^{(1)}$  (Eq. 7.3). Leur évaluation fournit finalement un échantillon de taille  $n_{corr}$  de l'ensemble des paramètres physiques  $X_k^{(1)}$  de niveau 1.
4. Nous analysons alors l'ensemble des couples de variables  $\left\{ X_k^{(1)}, X_{k'}^{(1)} \right\}$  du vecteur de niveau 1. Lorsqu'ils sont physiquement indépendants, le coefficient de corrélation qui leur est associé vaut 0. Dans le cas contraire, une estimation statistique de leur coefficient de corrélation est classiquement donnée par :

$$\rho \left( X_k^{(1)}, X_{k'}^{(1)} \right) = \frac{n_{corr} \sum x_k^{[i]} x_{k'}^{[i]} - \sum x_k^{[i]} \sum x_{k'}^{[i]}}{\sqrt{\left[ n_{corr} \sum \left( x_k^{[i]} \right)^2 - \left( \sum x_k^{[i]} \right)^2 \right] \left[ n_{corr} \sum \left( x_{k'}^{[i]} \right)^2 - \left( \sum x_{k'}^{[i]} \right)^2 \right]}} \quad (7.19)$$

où  $x_k^{[i]}$  et  $x_{k'}^{[i]}$  désignent respectivement les  $i$ -èmes réalisations de  $X_k^{(1)}$  et  $X_{k'}^{(1)}$ .

De cette manière, la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}^{(1)}$  des éléments du vecteur  $\mathbf{X}^{(1)}$  est totalement définie. Nous disposons également d'un échantillon de taille  $n_{corr}$  de réalisations du vecteur  $\mathbf{X}^{(1)}$  de variables aléatoires du niveau 1.

Après avoir déterminé le développement chaos polynomial et les fonctions de densité de probabilité *EPM* des éléments du vecteur  $\mathbf{X}^{(2)}$ , il suffit de répéter les étapes 2 à 4 de la procédure décrite ci-avant pour estimer la matrice de corrélation  $\rho^{(2)}$  relative aux éléments de ce vecteur de niveau 2. De manière incrémentale, nous sommes donc en mesure de construire les matrices de corrélation des vecteurs  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(TE)}$ , du niveau 0 jusqu'au niveau *TE* des *Tops Events*.

### 7.4.3 Conclusion

Cette section a brièvement présenté la démarche que nous suggérons pour la détermination de la matrice de corrélation des paramètres identifiés à chaque niveau *l* des scénarios de défaillance phénoménologiques. Au delà de l'information supplémentaire que son estimation procure sur le comportement et les relations des divers paramètres physiques impliqués dans les scénarios de défaillance d'un système mécanique, nous en avons également besoin pour réaliser le plus finement possible les analyses de fiabilité que nous explicitons dans le chapitre 8.

## 7.5 Exemples

Nous illustrons maintenant les principaux résultats de la méthodologie de propagation de l'aléa et des incertitudes que nous venons de mettre en place de manière formelle. Nous isolons un aspect particulier de l'exemple conducteur global introduit dans le chapitre 3 (Fig. 3.4) : nous examinons la succession des phénomènes de remplissage des cylindres et de la combustion d'un moteur Diesel.

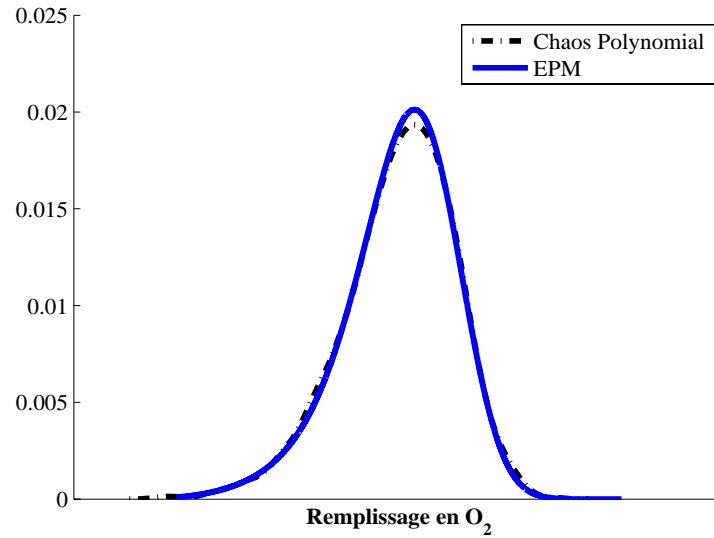
### 7.5.1 Remplissage en $O_2$ de la chambre de combustion

Le phénomène de remplissage en  $O_2$  de la chambre de combustion est explicité en détails dans le chapitre 3. Nous rappelons ici simplement qu'il dépend des 11 paramètres décrits dans le tableau 3.1, à savoir :

- les pertes de charges basse pression,  $PC_{BP}$  ;
- les pertes de charges haute pression,  $PC_{HP}$  ;
- les pertes de charges à l'échappement,  $PC_{ECH}$  ;
- l'efficacité thermique du refroidisseur d'air suralimenté,  $\eta_{RAS}$  ;
- le calage à l'admission,  $Cal_{ADM}$  ;
- le calage à l'échappement,  $Cal_{ECH}$  ;
- le rendement de la turbine du turbo,  $\eta_{Turbine}$  ;
- le rendement du compresseur du turbo,  $\eta_{Compresseur}$  ;
- la perméabilité de la turbine du turbo,  $perm_{Turbo}$  ;
- la quantité de carburant injectée,  $Q_{carb}$  ;
- le taux de gaz brûlés résiduels,  $Tx_{GBR}$ .

Dans le cadre de cette illustration, nous faisons l'hypothèse que les paramètres élémentaires de défaillance, rappelés dans la liste précédente, sont indépendants et donc que leur matrice de corrélation n'est autre que la matrice identité. En outre, nous précisons que nous exploitons ici un métamodèle de type surface de réponse quadratique pour l'estimation du remplissage en  $O_2$ , notée  $R_{O_2}$ , de la chambre de combustion.



FIG. 7.3 – Fonctions de densité chaos polynomial et *EPM* de  $R_{O_2}$ .

Moment d'ordre	Chaos polynomial/réf.	<i>EPM</i> /réf.	Chaos polynomial/ <i>EPM</i>
1	1,00	1,00	0,99
2	1,00	1,00	0,99
3	1,00	1,00	0,99
4	1,00	1,00	0,99

TAB. 7.1 – Premiers moments de  $R_{O_2}$ .

La figure 7.3 illustre les représentations de la fonction de densité de probabilité de  $R_{O_2}$  au moyen des approximations chaos polynomial et *EPM*. La fonction de densité relative au développement chaos polynomial correspond à un lissage, par une méthode de noyaux, de l'histogramme obtenu à partir de sa simulation.

Le tableau 7.1 donne une comparaison des quatre premiers moments de la variable  $R_{O_2}$  obtenus au moyen des approximations chaos polynomial et exponentielle d'un polynôme. Ils sont exprimés par rapport à la référence constituée par les résultats d'une simulation de Monte Carlo pour préserver la confidentialité des résultats. Il permet de conclure que les approximations de la fonction de densité de probabilité de  $R_{O_2}$  proposées par le développement chaos polynomial et l'*EPM* sont de qualité puisque leurs moments se superposent de manière quasi parfaite aux moments obtenus à partir d'un grand nombre de tirages de Monte Carlo.

Le tableau 7.2 représente les coefficients de corrélation des paramètres d'entrée du phénomène de remplissage en  $O_2$  de la chambre de combustion et de sa réponse.

Sur cet exemple, notre procédure de propagation de l'aléa et des incertitudes est validée.

Paramètres	$R_{O_2}$
$PC_{BP}$	0,02
$PC_{HP}$	-0,03
$PC_{ECH}$	-0,38
$\eta_{RAS}$	0,00
$Cal_{ADM}$	0,24
$Cal_{ECH}$	0,82
$\eta_{Turbine}$	0,13
$\eta_{Compresseur}$	0,10
$perm_{Turbo}$	-0,03
$Q_{carb}$	-0,02
$Tx_{GBR}$	0,02

TAB. 7.2 – Coefficients de corrélation de  $R_{O_2}$  et des paramètres d'entrée.

### 7.5.2 Pression de combustion maximale

Le phénomène de combustion et la réponse en pression  $P_{max}$  sont explicités en détails dans le chapitre 3. Nous rappelons ici simplement qu'ils dépendent des 8 paramètres décrits dans le tableau 3.2, à savoir :

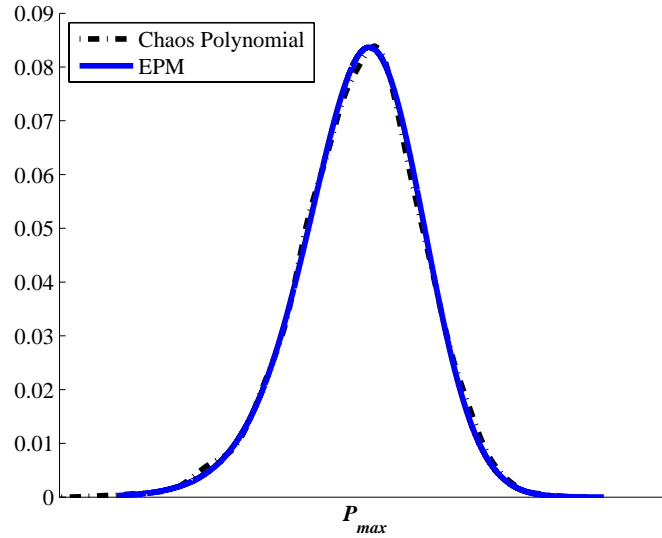
- le remplissage en  $O_2$  de la chambre de combustion issue du niveau inférieur et du calcul précédent,  $R_{O_2}$  ;
- l'avance à l'injection,  $AVI$  ;
- l'angle de nappe,  $AN$  ;
- la distance piston culasse,  $DPC$  ;
- le dépassement d'injecteur,  $NTP$  ;
- la pression du *common rail*,  $P_{Rail}$  ;
- la quantité de carburant injectée,  $Q_{carb}$  ;
- le taux de *swirl*,  $Tx_{Swirl}$ .

Nous précisons que nous exploitons ici un métamodèle de type surface de réponse quadratique pour l'estimation de la pression de combustion maximum  $P_{max}$ .

La figure 7.4 illustre les représentations de la fonction de densité de probabilité de  $P_{max}$  au moyen des approximations chaos polynomial et *EPM*. La fonction de densité relative au développement chaos polynomial correspond à un lissage, par une méthode de noyaux, de l'histogramme obtenu à partir de sa simulation.

Le tableau 7.3 donne une comparaison des quatre premiers moments de  $P_{max}$  obtenus au moyen des approximations chaos polynomial et exponentielle d'un polynôme. Ils sont exprimés par rapport à la référence constituée par les résultats d'une simulation de Monte Carlo pour préserver la confidentialité des résultats. Il permet de conclure que les approximations de la fonction de densité de probabilité de  $P_{max}$  proposées par le développement chaos polynomial et l'*EPM* sont de qualité puisque leurs moments se superposent de manière quasi parfaite aux moments obtenus à partir d'un grand nombre de tirages de Monte Carlo.

Le tableau 7.4 représente les coefficients de corrélation des paramètres d'entrée du phénomène de combustion et de sa réponse en pression de combustion maximum  $P_{max}$ .

FIG. 7.4 – Fonctions de densité chaos polynomial et *EPM* de  $P_{max}$ .

Moment d'ordre	Chaos polynomial/réf.	<i>EPM</i> /réf.	Chaos polynomial/ <i>EPM</i>
1	1,00	1,00	0,99
2	1,00	1,00	0,99
3	1,00	1,00	0,99
4	1,00	1,00	0,99

TAB. 7.3 – Premiers moments de  $P_{max}$ .

Cet exemple valide également notre procédure de propagation de l'aléa et des incertitudes.

## 7.6 Conclusion du chapitre

### 7.6.1 Synthèse

Au cours de ce chapitre nous avons défini la procédure probabiliste assurant la propagation de l'aléa sur les paramètres de conception au sein des scénarios de défaillance phénoménologiques mis en place dans les chapitres 5 et 6 (Fig. 7.1). Elle a été validée sur la base du traitement de problèmes académiques simples, que nous n'avons pas présentés ici. En revanche, nous l'avons illustrée par l'analyse de la succession des phénomènes de remplissage des cylindres et de la combustion d'un moteur Diesel.

A l'issue de ce chapitre, nous disposons d'une analyse de sensibilité des phénomènes physiques aux incertitudes de caractérisation des paramètres de conception, au niveau :

- de chaque noeud des scénarios de défaillance.
- du modèle global et des événements sommets (ou *Top Events*).

Paramètres	$P_{max}$
$PC_{BP}$	0,01
$PC_{HP}$	-0,01
$PC_{ECH}$	-0,08
$\eta_{RAS}$	0,00
$Cal_{ADM}$	0,05
$Cal_{ECH}$	0,20
$\eta_{Turbine}$	0,03
$\eta_{Compresseur}$	0,02
$perm_{Turbo}$	-0,00
$Q_{carb}$	0,06
$Tx_{GBR}$	0,01
$R_{0_2}$	0,22
$AVI$	0,87
$AN$	0,01
$DPC$	-0,33
$NTP$	0,01
$P_{Rail}$	0,07
$Tx_{Swirl}$	0,25

TAB. 7.4 – Coefficients de corrélation de  $P_{max}$  et des paramètres d'entrée.

Nous sommes donc en mesure de visualiser l'influence de l'aléa sur la réalisation de la physique de défaillance de systèmes mécaniques. Il s'agit maintenant d'analyser ces scénarios de défaillance phénoménologiques probabilisés du point de vue de la fiabilité. En effet, notre objectif n'est pas seulement de visualiser l'influence de l'aléa sur la réalisation de la physique de défaillance mais également de donner des informations visant à la réduire et à mieux la contrôler.

### 7.6.2 Perspectives

Nous gardons bien à l'esprit que cette procédure de propagation de l'aléa, à travers les phénomènes physiques successivement impliqués dans des scénarios de défaillance de systèmes mécaniques, n'est pas figée. Elle est en mesure de bénéficier de l'ensemble des développements, déjà en cours, visant à la définition d'approches plus précises, requérant toujours moins d'appels aux codes de calcul et donc plus économiques en temps d'évaluation.

En particulier, il serait intéressant d'utiliser une méthode de chaos polynomial généralisé [XK02] tirant avantage de l'ensemble des polynômes orthogonaux de la famille de Askey [AW85] et pas seulement d'un chaos polynomial construit à partir de polynômes d'Hermite de variables aléatoires normales centrées normées. En effet, ce dernier n'est pas totalement adapté pour l'approximation de certains types de variables aléatoires (*e.g.* uniforme). En revanche, un développement chaos polynomial élaboré à partir de polynômes de Legendre de variables uniformes l'est complètement.

Nous faisons enfin remarquer que nous travaillons à chaque niveau de nos scénarios

de défaillance phénoménologiques probabilisés avec les fonctions de densité marginales et la matrice de corrélation des différents paramètres. Une voie à explorer, même si elle présente de nombreux verrous scientifiques et techniques, est celle de l'exploitation du développement de l'ensemble des paramètres des scénarios sur la base d'un même chaos polynomial. De cette manière, nous disposerions d'une image de la distribution de probabilité conjointe des paramètres identifiés à chaque niveau, et non plus simplement de leurs fonctions de densité marginales et de leur matrice de corrélation. Toutefois, le principal souci, et non des moindres, concerne la taille  $P$  de la base du développement chaos polynomial qui augmente très rapidement avec le nombre de paramètres considéré. La quantité de coefficients des différents développements croît en conséquence et rend leur estimation impossible, à moins d'implémenter une méthode nouvelle et spécifique à ce problème.

## Chapitre 8

# Evaluation, mise à jour et validation du modèle de fiabilité

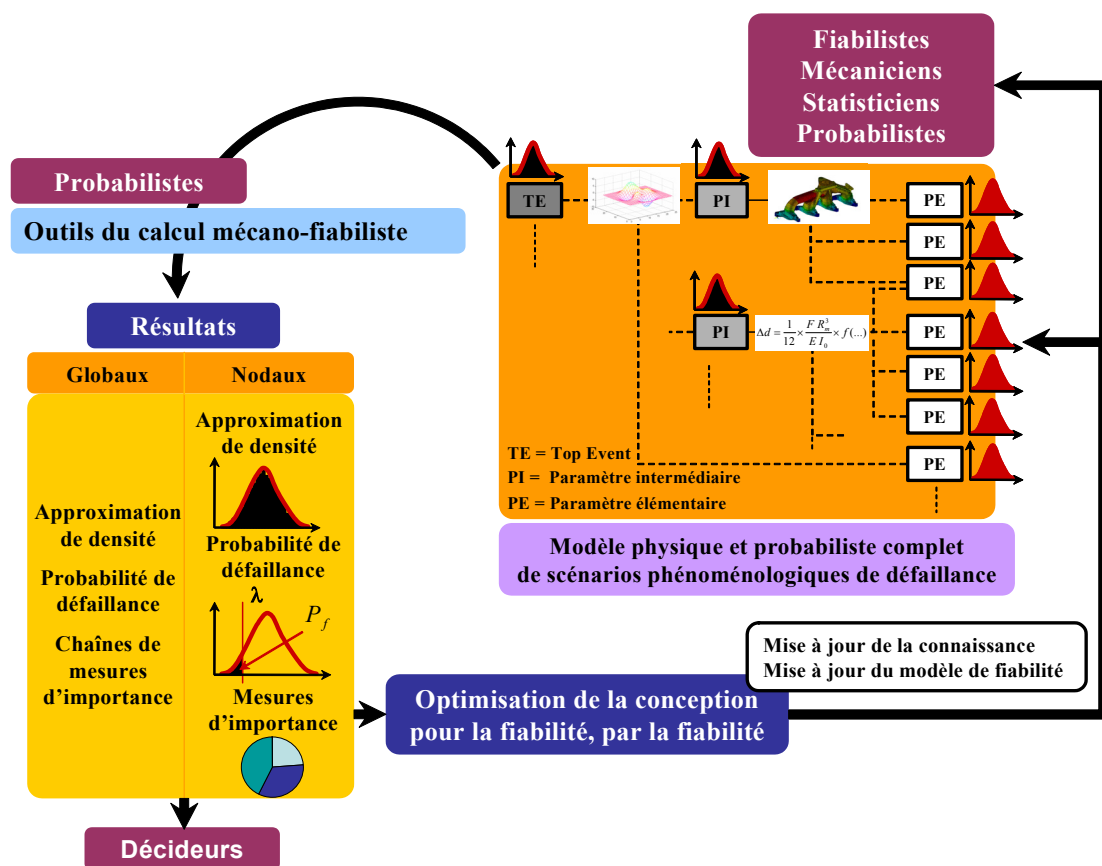


FIG. 8.1 – Analyse mécano-fiabiliste système de scénarios de défaillance.

## 8.1 Introduction

Nous considérons ici comme acquise la modélisation physique et probabiliste évolutive des scénarios de défaillance (Chapitres 5 à 7). L’objectif de ce chapitre est de définir la procédure originale que nous déployons pour assurer leur traitement efficace. Tirant essentiellement avantage des méthodes et des outils classiques du calcul de fiabilité mécano-probabiliste, dont nous rappelons les principaux aspects dans l’annexe E<sup>1</sup>, elle vise à :

- fournir des estimateurs de mesures de performance et de fiabilité aux différents niveaux des scénarios de défaillance phénoménologiques,
- expliquer le rôle et l’influence des paramètres de conception et des phénomènes physiques intervenant à chacun de ces niveaux ;
- piloter l’activité de conception fiable en identifiant les leviers disponibles pour l’optimisation du dimensionnement des systèmes mécaniques.

Cette étape terminale de la méthodologie que nous développons est orchestrée par les ingénieurs probabilistes. Elle repose avant tout sur leur savoir-faire et sur la qualité de leurs interactions avec les autres acteurs de la conception (Fig. 8.1).

Nous définissons d’abord plusieurs stratégies ou schémas d’analyse dont nous précisons les tenants et les aboutissants. En particulier, nous introduisons le concept d’analyses *FORM/SORM* (Annexe E) de type “court-circuit”.

Nous présentons ensuite l’ensemble de leurs produits, c’est-à-dire : les probabilités de défaillance et les indices de fiabilité relatifs aux différentes fonctions d’états limites, leurs coefficients de corrélation, les probabilités conditionnelles que le système considéré opère dans une configuration particulière, sa sensibilité et celle de sa fiabilité aux paramètres de conception incertains. En outre, nous proposons la construction de chaînes de facteurs d’importance originales : elles déterminent les séquences phénoménologiques les plus critiques vis-à-vis des défaillances potentielles examinées.

Finalement, nous illustrons l’aptitude de la démarche et de ses produits à :

- mettre à jour et valider le modèle de fiabilité par le calcul physique prévisionnel,
- piloter l’activité de conception en assurant la définition d’arguments d’aide au dimensionnement fiable et la construction de plans de validations adéquats.

N.B. : Nous reprenons les notations relatives à la définition formelle des scénarios de défaillance phénoménologiques, introduites au cours du chapitre 5, en section 5.3.3.

## 8.2 Stratégies d’analyse

### 8.2.1 Analyses niveau par niveau

Le premier schéma d’analyse (-1- dans la figure 8.2) est le plus naturel puisqu’il accompagne la construction des scénarios de défaillance systèmes, physiques et probabilistes, discutés dans le chapitre précédent. La densité de probabilité  $f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$  de chaque paramètre  $X_k^{(l)}$  du modèle, ainsi que la matrice de corrélation  $\rho^{(l)}$  des éléments

<sup>1</sup>Pour une présentation complète des enjeux des analyses et des techniques relevant du couplage mécano-fiabiliste nous renvoyons le lecteur à l’ouvrage de référence [Lem05b].

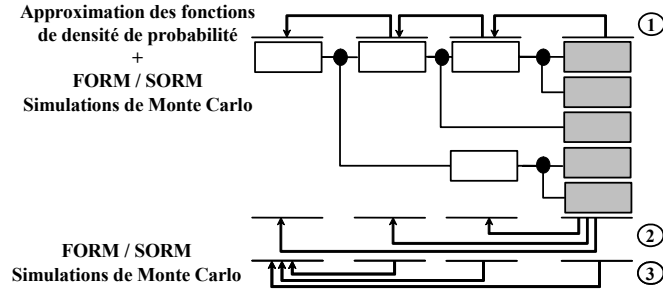


FIG. 8.2 – Stratégies d’analyse mécano-fiabiliste.

du vecteur de paramètres  $\mathbf{X}^{(l)}$  de niveau  $l$ , sont déterminées suivant la procédure de progression niveau à niveau explicitée dans le chapitre 7. Pour chaque fonction de performance  $G_k^{(l)}$ , nous avons également une approximation de la variable aléatoire correspondante  $X_k^{(l)}$  sous la forme d’un développement sur la base d’un chaos polynomial (Eq. 8.2) et d’une approximation par une exponentielle d’un polynôme de sa fonction de densité (Eq. 8.3) :

$$G_k^{(l)}(\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}) = M_k^{(l)}(\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}) - \gamma_k^{(l)} = X_k^{(l)} - \gamma_k^{(l)} \quad (8.1)$$

$$\approx \sum_{j=0}^{P-1} \hat{a}_{j,k,l}^{(l-1)} \Psi_j(\check{\xi}_{k,l}^{(l-1)}) - \gamma_k^{(l)} = \hat{G}_k^{(l)}(\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}) \quad (8.2)$$

où  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}$  est le vecteur de variables aléatoires construit à partir des seuls éléments de  $\mathbf{X}^{(l-1)}$  impactant la fonction d’état limite  $G_k^{(l)}$ .

$$f_{G_k^{(l)}}(x) \approx \hat{f}_{G_k^{(l)}}^{EPM}(x) = \hat{c}_{G_k^{(l)}} \exp \left[ \sum_{i=1}^{n_{EPM}^{G_k^{(l)}}} \hat{a}_{EPM_i}^{G_k^{(l)}} x^i \right] \quad (8.3)$$

Par conséquent, et nous l’explicitons dans la suite, nous sommes en mesure d’estimer de manière simple la probabilité de défaillance  $P_{f_k}^{(l)}$  et l’indice de fiabilité  $\beta_k^{(l)}$  associés à cette fonction d’état limite ou de performance  $G_k^{(l)}$ . En outre, la réalisation d’analyses *FORM* suivant ce schéma conduit à l’évaluation de l’influence des éléments du vecteur  $\mathbf{X}^{(l-1)}$ , sur les comportements physiques nodaux  $M_k^{(l)}$  et sur les mesures de fiabilité associées à un état limite  $G_k^{(l)}$ .

### 8.2.2 Analyses *FORM/SORM* par court-circuit montant

Le second schéma d’analyse (-2- dans la figure 8.2) suggère la réalisation d’analyses *FORM/SORM* de type “court-circuit” des niveaux  $l$  par rapport au niveau élémentaire en chaque nœud des scénarios de défaillance. Ce concept de “court-circuit” montant permet de traiter les paramètres  $X_k^{(l)}$  engendrés par les phénomènes  $M_k^{(l)}$  de niveau  $l$ ,



par rapport au vecteur  $\mathbf{X}^{(0)}$  de niveau 0, en ne considérant les niveaux intermédiaires que de manière implicite. La finalité consiste à obtenir de l'information supplémentaire, spécifique à l'influence des paramètres élémentaires sur les paramètres de niveau  $l$ .

D'une part, il conduit à l'évaluation de l'influence globale des paramètres élémentaires de conception sur les paramètres intermédiaires  $X_k^{(l)}, k = 1, \dots, nva_l$  et  $l = 1, \dots, TE$  ainsi que sur les mesures de fiabilité  $P_{f_k}^{(l)}$  et  $\beta_k^{(l)}$  associées aux fonctions de performance  $G_k^{(l)}$ . D'autre part, il permet de valider l'estimation des mesures de fiabilité effectuées au cours des études de type 1.

Nous verrons par la suite que, par extension, il autorise également l'estimation des corrélations entre les différents états limites définis dans le modèle et le calcul de probabilité d'occurrence d'événements sachant l'occurrence d'événements précurseurs.

### 8.2.3 Analyses *FORM/SORM* par court-circuit descendant

Le troisième schéma d'analyse (-3- dans la figure 8.2) propose la réalisation d'analyses *FORM/SORM* de type "court-circuit" du niveau  $TE$  des *Top Events* par rapport aux niveaux inférieurs  $l = 0, \dots, TE - 1$ . Ce concept de "court-circuit" descendant permet de traiter le vecteur des paramètres  $\mathbf{X}^{(TE)}$  par rapport à chaque vecteur  $\mathbf{X}^{(l)}$  des niveaux inférieurs,  $l = 0, \dots, TE - 1$ , en ne considérant les niveaux se situant entre les rangs  $TE$  et  $l$  que de manière implicite. La finalité consiste à obtenir de l'information supplémentaire, spécifique aux relations directes entre ces différents paramètres : l'influence globale des paramètres intermédiaires sur les *Top Events* est ainsi capturée.

La complémentarité de ce schéma avec les deux précédents favorise la construction de chaînes de mesures d'importance (Section 8.4). Elles traduisent l'influence de chacune des branches de l'arbre sur les *Top Events* et le poids de chaque paramètre dans chacune d'entre elles.

## 8.3 Estimation de mesures de la fiabilité

### 8.3.1 Probabilités de défaillance et indices de fiabilité

La forme générale de la probabilité de défaillance  $P_{f_k}^{(l)}$  associée à un état limite  $G_k^{(l)}$ ,  $k = 1, \dots, nva_l$  et  $l = 1, \dots, TE$ , est classiquement définie par :

$$P_{f_k}^{(l)} = \Pr \left[ G_k^{(l)} \left( \check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l_{ref})} \right) \leq 0 \right], \quad l_{ref} = 0, \dots, l-1 \quad (8.4)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_f} f_{\check{\mathbf{X}}_k^{(l-1)}} \left( \check{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l_{ref})} \right) d\check{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l_{ref})}, \quad l_{ref} = 0, \dots, l-1 \quad (8.5)$$

où  $\mathcal{D}_f = \left\{ G_k^{(l)} \left( \check{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l_{ref})} \right) \leq 0 \right\}$  représente le domaine des états défaillants (définis au niveau des *Top Events* par les fonctions  $G_k^{(TE)}$ ,  $l = TE$ ) ou des performances dégradées voire inacceptables du système (définies aux niveaux intermédiaires  $l < TE$  par les fonctions de performance  $G_k^{(l)}$ ).

Le calcul de la probabilité de défaillance  $P_{f_k}^{(l)}$  et de l'indice de fiabilité  $\beta_k^{(l)}$  peut être réalisé de manière usuelle, à partir de n'importe quel niveau  $l_{ref}$  inférieur à  $l$ , par la mise en œuvre des techniques d'approximation de type *FORM/SORM* ou d'une méthode de simulation de Monte Carlo. Le calcul de type *FORM* permet également la détermination du point de conception (point de défaillance le plus probable), noté ici  $\tilde{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l_{ref})^*}$  dans l'espace physique et  $\tilde{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l_{ref})^*}$  dans l'espace normal standard. Alternativement, nous pouvons ici bénéficier :

1. de la connaissance du développement sur la base d'un chaos polynomial de la variable aléatoire correspondant à  $G_k^{(l)}$  par rapport au vecteur  $\tilde{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}$  de variables aléatoires du niveau immédiatement inférieur (Eq. 8.2),
2. de l'approximation *EPM* correspondante de sa fonction de densité de probabilité (Eq. 8.3).

Dans le premier cas de figure, le calcul approché de la probabilité de défaillance  $P_{f_k}^{(l)}$  et de l'indice de fiabilité  $\beta_k^{(l)}$  peut être réalisé à partir de la surface de réponse stochastique  $\hat{G}_k^{(l)}$  et de la mise en œuvre d'analyses *FORM/SORM* ou d'une simulation de Monte Carlo. Son principal intérêt est de participer à la simplification de leur implémentation lorsque la fonction de performance  $G_k^{(l)}(\tilde{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l_{ref})})$  n'est connue que sous la forme d'un code de calcul complexe :  $G_k^{(l)}$  est remplacée par la surface de réponse stochastique analytique  $\hat{G}_k^{(l)}$ . Dans le deuxième cas de figure, l'estimation de la probabilité de défaillance  $P_{f_k}^{(l)}$  est d'abord obtenue par intégration directe de la fonction de densité de probabilité *EPM* de  $X_k^{(l)}$  :

$$P_{f_k}^{(l)} \approx \hat{P}_{f_k}^{(l)} = \int_{-\infty}^{\gamma_k^{(l)}} \hat{f}_{X_k^{(l)}}^{EPM}(\nu) d\nu \quad (8.6)$$

On en déduit ensuite une estimation de l'indice de fiabilité  $\beta_k^{(l)}$  :

$$\hat{\beta}_k^{(l)} \approx -\Phi^{-1}\left(\hat{P}_{f_k}^{(l)}\right) \quad (8.7)$$

où  $\Phi$  est la distribution normale standard.

Par l'analyse des différents nœuds des scénarios de défaillance mécano-probabilistes proposés, nous sommes donc en mesure de caractériser :

1. la probabilité de défaillance "ultime" d'un système mécanique par rapport à une fonction d'état limite traduisant directement l'expression d'un mode de défaillance.
2. la probabilité que le comportement du système ne satisfasse pas à certains critères de performance (ou critères de contrôle), autrement dit, sa probabilité de fonctionnement dégradé vis-à-vis de ces règles.

### 8.3.2 Corrélations des fonctions de performance et des états limites

Nous considérons ici un système présentant plusieurs modes potentiels de défaillance ou de performance dégradée. A chaque mode, formellement défini au moyen

d'une fonction de type  $G_k^{(l)}$ , nous associons l'événement  $E_k^{(l)} = \{G_k^{(l)} \leq 0\}$  et son complémentaire  $\overline{E_k^{(l)}} = \{G_k^{(l)} > 0\}$ . L'étude des corrélations des fonctions de performance et des fonctions d'état limite a pour objectif de déterminer, en première approximation, la propension des événements qui y sont rattachés. En outre, nous verrons par la suite comment les exploiter pour l'estimation de la probabilité d'occurrence d'un événement  $E_k^{(l)}$  donné, sachant l'occurrence d'une séquence d'événements précurseurs.

Soient  $G_k^{(l)}$  un premier état limite associé au nœud  $k$  de niveau  $l$  et  $G_{k'}^{(l')}$  un deuxième état limite associé au nœud  $k'$  du niveau  $l'$ . Dans le cadre d'une approximation *FORM* par rapport au niveau élémentaire 0, les hyperplans correspondant aux événements  $E_k^{(l)} = E_k^{(l/0)}$  et  $E_{k'}^{(l')} = E_{k'}^{(l'/0)}$  sont respectivement notés  $Z_k^{(l/0)}$  et  $Z_{k'}^{(l'/0)}$  et leurs formes normées sont données par<sup>2</sup> :

$$Z_k^{(l/0)} = \beta_k^{(l/0)} + \check{\alpha}_k^{(l/0)T} \check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(0)} \quad (8.8)$$

$$Z_{k'}^{(l'/0)} = \beta_{k'}^{(l'/0)} + \check{\alpha}_{k'}^{(l'/0)T} \check{\mathbf{U}}_{k',l'}^{(0)} \quad (8.9)$$

avec :

- $\check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(0)}$  (*resp.*  $\check{\mathbf{U}}_{k',l'}^{(0)}$ ), le vecteur de variables aléatoires normales centrées normées construit par l'application d'une transformation isoprobabiliste, notée  $\check{\mathbf{T}}_{k,l}^{-1(0)}$  (*resp.*  $\check{\mathbf{T}}_{k',l'}^{-1(0)}$ ), du vecteur des variables aléatoires physiques  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(0)}$  (*resp.*  $\check{\mathbf{X}}_{k',l'}^{(0)}$ ).
- $\check{\alpha}_k^{(l/0)}$  (*resp.*  $\check{\alpha}_{k'}^{(l'/0)}$ ), le vecteur des cosinus directeurs de la surface d'état limite  $G_k^{(l)}$  ( $\check{\mathbf{T}}_{k,l}^{-1(0)}(\check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(0)}) = H(\check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(0)})$ ) (*resp.*  $G_{k'}^{(l')}$  ( $\check{\mathbf{T}}_{k',l'}^{-1(0)}(\check{\mathbf{U}}_{k',l'}^{(0)}) = H(\check{\mathbf{U}}_{k',l'}^{(0)})$ ) au point de défaillance le plus probable. Les cosinus directeurs  $\check{\alpha}_k^{(l/0)}$  (*resp.*  $\check{\alpha}_{k'}^{(l'/0)}$ ) sont évalués à travers la mise en œuvre du schéma de calcul n°2 introduit précédemment et illustré dans la figure 8.2.
- $\beta_k^{(l/0)}$  (*resp.*  $\beta_{k'}^{(l'/0)}$ ), l'indice de fiabilité associé à  $G_k^{(l)}$  (*resp.*  $G_{k'}^{(l')}$ ), calculé par une analyse *FORM* du niveau  $l$  (*resp.*  $l'$ ) par rapport au niveau 0.

$Z_k^{(l)}$  et  $Z_{k'}^{(l')}$  peuvent être déterminés de manière équivalente en réexprimant  $\check{\alpha}_k^{(l/0)}$  (*resp.*  $\check{\alpha}_{k'}^{(l'/0)}$ ) sous la forme de vecteurs  $\alpha_k^{(l/0)}$  (*resp.*  $\alpha_{k'}^{(l'/0)}$ ) de dimension  $nva_0$  identique à celle de  $\mathbf{U}^{(0)}$ . Les éléments de  $\alpha_k^{(l/0)}$  (*resp.*  $\alpha_{k'}^{(l'/0)}$ ) sont alors définis de la manière suivante :

- $\alpha_p^{(l/0)} = \check{\alpha}_{q(p)}^{(l/0)}$  (*resp.*  $\alpha_p^{(l'/0)} = \check{\alpha}_{q(p)}^{(l'/0)}$ ) si l'élément  $p = 1, \dots, nva_0$  est une entrée de la fonction de performance  $G_k^{(l)}$  (*resp.*  $G_{k'}^{(l')}$ ).  $q(p)$  est la transformation assurant l'identification de l'indice  $q$  de l'élément du vecteur réduit  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(0)}$  (*resp.*  $\check{\mathbf{X}}_{k',l'}^{(0)}$ ) des paramètres physiques correspondant à l'élément  $p$  du vecteur global  $\mathbf{X}^{(0)}$ .
- $\alpha_p^{(l/0)} = 0$  (*resp.*  $\alpha_p^{(l'/0)} = 0$ ) si l'élément  $p$  n'est pas une entrée de la fonction de performance  $G_k^{(l)}$  (*resp.*  $G_{k'}^{(l')}$ ).

<sup>2</sup>L'ensemble des concepts et des quantités relatifs à l'implémentation de l'approche FORM est défini en détail en annexe E.

On obtient ainsi les relations équivalentes aux équations 8.8 et 8.9 :

$$Z_k^{(l/0)} = \beta_k^{(l/0)} + \alpha_k^{(l/0)T} \mathbf{U}^{(0)} \quad (8.10)$$

$$Z_{k'}^{(l'/0)} = \beta_{k'}^{(l'/0)} + \alpha_{k'}^{(l'/0)T} \mathbf{U}^{(0)} \quad (8.11)$$

De manière immédiate, nous avons les moyennes de  $Z_k^{(l/0)}$  et  $Z_{k'}^{(l'/0)}$  :

$$\mathbf{E} [Z_k^{(l/0)}] = \beta_k^{(l/0)} \quad \mathbf{E} [Z_{k'}^{(l'/0)}] = \beta_{k'}^{(l'/0)} \quad (8.12)$$

car les variables aléatoires du vecteur  $\mathbf{U}^{(0)}$  sont de moyennes nulles. Pour les variances, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{var} [Z_k^{(l/0)}] &= \mathbf{E} [Z_k^{(l/0)2}] - \left(\beta_k^{(l/0)}\right)^2 \\ &= \left(\beta_k^{(l/0)}\right)^2 + \alpha_k^{(l/0)T} \mathbf{cov} [\mathbf{U}^{(0)} \mathbf{U}^{(0)T}] \alpha_k^{(l/0)} - \left(\beta_k^{(l/0)}\right)^2 \\ &= \alpha_k^{(l/0)T} \alpha_k^{(l/0)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (8.13)$$

car  $\mathbf{cov} [\mathbf{U}^{(0)} \mathbf{U}^{(0)T}]$  est la matrice unité. De même,  $\mathbf{var} [Z_{k'}^{(l'/0)}] = 1$ . La covariance  $\mathbf{cov} [Z_k^{(l/0)}, Z_{k'}^{(l'/0)}]$ , quant à elle, peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{cov} [Z_k^{(l/0)}, Z_{k'}^{(l'/0)}] &= \mathbf{E} [Z_k^{(l/0)} Z_{k'}^{(l'/0)}] - \beta_k^{(l/0)} \beta_{k'}^{(l'/0)} \\ &= \alpha_k^{(l/0)T} \mathbf{cov} [\mathbf{U}^{(0)} \mathbf{U}^{(0)T}] \alpha_{k'}^{(l'/0)} \\ &= \alpha_k^{(l/0)T} \alpha_{k'}^{(l'/0)} \end{aligned} \quad (8.14)$$

On a donc finalement :

$$\mathbf{cor} (Z_k^{(l/0)}, Z_{k'}^{(l'/0)}) = \frac{\alpha_k^{(l/0)T} \alpha_{k'}^{(l'/0)}}{1 \times 1} = \rho_{Z_k^{(l)} Z_{k'}^{(l')}} \approx \rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}} \quad (8.15)$$

Le coefficient de corrélation  $\rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}}$ , entre deux états de performance limite définis dans les scénarios de défaillance phénoménologiques et probabilistes, est donc classiquement donnée par le produit des cosinus directeurs en approximation *FORM* :

$$\rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}} \approx \sum_{i=1}^{nva_0} \alpha_{i \ k}^{(l/0)} \alpha_{i \ k'}^{(l'/0)} \quad (8.16)$$

#### Remarques :

1. Nous pouvons raisonner de manière identique avec les éléments complémentaires de  $E_k^{(l)}$  et  $E_{k'}^{(l')}$ . Par exemple, en considérant  $\overline{E_k^{(l)}} = \{G_k^{(l)} > 0\}$ , il suffit d'utiliser le vecteur de cosinus directeurs qui lui est associé, à savoir  $-\alpha_{i \ k}^{(l/0)}$ .

2. Dans le cas particulier où l'on cherche la corrélation de deux états limites définis au même niveau  $l$  (e.g.  $G_k^{(l)}$  et  $G_{k'}^{(l)}$ ), il est également possible d'en obtenir une approximation plus simplement en déterminant les vecteurs de cosinus directeurs  $\alpha_k^{(l/l-1)}$  et  $\alpha_{k'}^{(l/l-1)}$  par une analyse *FORM* suivant le schéma de calcul n°1. Il vient ainsi :

$$\rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l)}} \approx \sum_{i=1}^{nval-1} \alpha_i^{(l/l-1)} \alpha_i^{(l/l-1)} \quad (8.17)$$

### 8.3.3 Probabilités conditionnelles

La connaissance des probabilités d'occurrence des événements  $E_k^{(l)}$  (Eq. 8.4) et de leur matrice de corrélation donne la possibilité d'estimer, dans le cadre d'une approximation au premier ordre, la probabilité des événements  $E_k^{(l)}$  sachant l'occurrence d'une combinaison d'événements précurseurs.

#### Cas élémentaire

De manière usuelle, si on considère deux événements  $E_k^{(l)}$  et  $E_{k'}^{(l')}$ , la probabilité conditionnelle d'avoir  $E_k^{(l)}$  sachant  $E_{k'}^{(l')}$ , notée  $\Pr(E_k^{(l)} | E_{k'}^{(l')})$ , est définie par la relation :

$$\Pr(E_k^{(l)} | E_{k'}^{(l')}) = \frac{\Pr(E_k^{(l)} \cap E_{k'}^{(l')})}{\Pr(E_{k'}^{(l')})} \quad (8.18)$$

où la probabilité  $\Pr(E_k^{(l)} \cap E_{k'}^{(l')})$  d'observer à la fois  $E_k^{(l)}$  et  $E_{k'}^{(l')}$  peut être vue comme la probabilité de défaillance d'un système parallèle à deux composants. Dans le contexte d'une approximation *FORM*,  $\Pr(E_k^{(l)} \cap E_{k'}^{(l')})$  peut s'écrire sous la forme

$$\Pr\left(\left(\beta_k^{(l/0)} + \alpha_k^{(l/0)T} \mathbf{U}^{(0)} \leq 0\right) \cap \left(\beta_{k'}^{(l'/0)} + \alpha_{k'}^{(l'/0)T} \mathbf{U}^{(0)} \leq 0\right)\right) \quad (8.19)$$

Soit les variables normées, centrées réduites et corrélées :

$$V_k^{(l/0)} = \beta_k^{(l/0)} + \alpha_k^{(l/0)T} \mathbf{U}^{(0)} \quad (8.20)$$

$$V_{k'}^{(l'/0)} = \beta_{k'}^{(l'/0)} + \alpha_{k'}^{(l'/0)T} \mathbf{U}^{(0)} \quad (8.21)$$

Il vient :

$$\Pr(E_k^{(l)} \cap E_{k'}^{(l')}) = \Pr(V_k^{(l/0)} \leq -\beta_k^{(l/0)}, V_{k'}^{(l'/0)} \leq -\beta_{k'}^{(l'/0)}) \quad (8.22)$$

$$= \int_{-\infty}^{-\beta_k^{(l/0)}} \int_{-\infty}^{-\beta_{k'}^{(l'/0)}} f_{\mathbf{V}}(v_1, v_2) dv_1 dv_2 \quad (8.23)$$

Une autre expression de  $\Pr(E_k^{(l)} \cap E_{k'}^{(l')})$  faisant intervenir explicitement la corrélation  $\rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l'')}}$  peut être tirée de la relation précédente. Celle-ci fait apparaître la fonction

de répartition de la loi binormale  $\Phi_2$ , elle s'écrit :

$$\Pr \left( E_k^{(l)} \cap E_{k'}^{(l')} \right) = \Phi_2 \left( -\beta_k^{(l/0)}, -\beta_{k'}^{(l'/0)}; \rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}} \right) \quad (8.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{-\beta_k^{(l/0)}} \int_{-\infty}^{-\beta_{k'}^{(l'/0)}} \varphi_2 \left( \tilde{\mathbf{u}}; \rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}} \right) d\beta_k^{(l/0)} d\beta_{k'}^{(l'/0)} \quad (8.25)$$

avec :

- $\beta_k^{(l/0)}$  et  $\beta_{k'}^{(l'/0)}$  les indices de fiabilité associés aux événements  $E_k^{(l)}$  et  $E_{k'}^{(l')}$ ,
- $\rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}}$  le coefficient de corrélation liant ces deux événements,
- $\varphi_2 \left( \tilde{\mathbf{u}}; \rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}} \right)$  la densité binormale pour le vecteur  $\tilde{\mathbf{u}}$  de deux variables aléatoires Gaussiennes normées, centrées et corrélées :

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}}^2}} \exp \left( -\frac{\left( \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 - 2\rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}} \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \right)}{2 \left( 1 - \rho_{E_k^{(l)} E_{k'}^{(l')}}^2 \right)} \right) \quad (8.26)$$

La relation 8.25 est évaluée par intégration numérique.

La mise en œuvre d'analyses *FORM* permet ainsi l'évaluation des probabilités  $\Pr \left( E_k^{(l)} \cap E_{k'}^{(l')} \right)$  et  $\Pr \left( E_{k'}^{(l')} \right)$ . Il est donc possible d'estimer la probabilité conditionnelle  $\Pr \left( E_k^{(l)} \middle| E_{k'}^{(l')} \right)$  pour n'importe quel couple d'événements  $E_k^{(l)}$  et  $E_{k'}^{(l')}$  des scénarios de défaillance phénoménologiques probabilisés.

**Remarque :** Si on considère la probabilité de l'intersection  $E_k^{(l)} \cap \overline{E_{k'}^{(l')}}$ , il vient de manière similaire :

$$\Pr \left( E_k^{(l)} \cap \overline{E_{k'}^{(l')}} \right) = \Phi_2 \left( -\beta_k^{(l/0)}, \beta_{k'}^{(l'/0)}; \rho_{E_k^{(l)} \overline{E_{k'}^{(l')}}} \right) \quad (8.27)$$

et

$$\Pr \left( E_k^{(l)} \middle| \overline{E_{k'}^{(l')}} \right) = \frac{\Pr \left( E_k^{(l)} \cap \overline{E_{k'}^{(l')}} \right)}{\Pr \left( \overline{E_{k'}^{(l')}} \right)} \quad (8.28)$$

Le raisonnement incluant des événements complémentaires ne pose pas de difficulté supplémentaire.

**Généralisation : probabilité d'occurrence d'un événement sachant une séquence d'événements précurseurs**

Nous savons estimer les probabilités conditionnelles du type  $\Pr \left( E_k^{(l)} \middle| E_{k'}^{(l')} \right)$  pour n'importe quel couple d'événements  $E_k^{(l)}$  et  $E_{k'}^{(l')}$  de l'arbre. Nous montrons maintenant dans quelle mesure il est possible de généraliser ce résultat dans l'objectif de

caractériser la contribution de chaque événement et de chaque branche de l'arbre à la probabilité d'occurrence du Top Event.

Nous sommes d'abord tentés d'appliquer le théorème des probabilités totales pour obtenir une décomposition de la probabilité du *Top Event* faisant intervenir la contribution de chaque scénario. Seulement, les hypothèses d'indépendances des événements ne sont pas réunies. En règle générale, étant donné que les événements  $E_k^{(TE-1)}$  et  $E_{k'}^{(TE-1)}$  dépendent des mêmes paramètres élémentaires,  $E_k^{(TE-1)} \cap E_{k'}^{(TE-1)} \neq \emptyset$ , le théorème des probabilités totales ne s'applique donc pas simplement. Afin d'obtenir de l'information supplémentaire sur la probabilité d'occurrence du Top Event, nous proposons d'exploiter la généralisation du calcul précédent (Eq. 8.18) à l'intersection et à l'union d'un nombre  $n$  quelconque d'événements.

**Probabilité de l'intersection d'un nombre  $n$  d'événements de l'arbre.** La relation 8.24 que nous avons démontrée pour deux événements se généralise à  $n$  événements et on montre [Lem05b] que :

$$\Pr \left( \bigcap_{i=1}^n E_i \right) = \Phi_n(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) \quad (8.29)$$

où  $\boldsymbol{\rho}$  est la matrice de corrélation des événements  $E_i, i = 1, \dots, n$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  est le vecteur des indices de fiabilité  $\beta_i$  associé aux événements  $E_i$  et  $\Phi_n$  est la loi de distribution multinormale :

$$\Phi_n(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{-\beta_1} \dots \int_{-\infty}^{-\beta_n} \varphi_n(\tilde{\mathbf{u}}; \boldsymbol{\rho}) d\beta_1 \dots d\beta_n \quad (8.30)$$

avec :

$$\varphi_n(\tilde{\mathbf{u}}; \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi^{n/2} \sqrt{\det \boldsymbol{\rho}}} \exp \left( -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\rho}^{-1} \tilde{\mathbf{u}} \right) \quad (8.31)$$

Il existe des procédures de calcul numérique efficaces pour l'évaluation non triviale de  $\Phi_n(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho})$ . Ainsi, nous sommes en mesure de déterminer au premier ordre, pour une configuration donnée du système examiné, la probabilité d'avoir tel événement et tel autre événement.

Le calcul de la probabilité des *Top Events* sachant l'intersection de plusieurs événements intermédiaires est donc accessible. Par exemple, la probabilité d'occurrence du *Top Event*  $E_k^{(TE)}$  sachant  $E_{k'}^{(TE-1)}$  et  $E_{k''}^{(TE-1)}$  est donnée par la relation :

$$\Pr \left( E_k^{(TE)} \mid E_{k'}^{(TE-1)} \cap E_{k''}^{(TE-1)} \right) = \frac{\Pr \left( E_k^{(TE)} \cap E_{k'}^{(TE-1)} \cap E_{k''}^{(TE-1)} \right)}{\Pr \left( E_{k'}^{(TE-1)} \cap E_{k''}^{(TE-1)} \right)} \quad (8.32)$$

$\Pr \left( E_k^{(TE)} \cap E_{k'}^{(TE-1)} \cap E_{k''}^{(TE-1)} \right)$  et  $\Pr \left( E_{k'}^{(TE-1)} \cap E_{k''}^{(TE-1)} \right)$  peuvent être évaluées de manière simple par la méthode que nous venons d'expliciter. Il est donc possible d'estimer  $\Pr \left( E_k^{(TE)} \mid E_{k'}^{(TE-1)} \cap E_{k''}^{(TE-1)} \right)$  au premier ordre.

**Probabilité de l'intersection d'un nombre  $n$  d'événements de l'arbre.** De manière similaire, il est possible de montrer, dans le cadre d'une solution au premier ordre, que :

$$\Pr \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) = 1 - \Phi_n(\beta; \rho) \quad (8.33)$$

Ainsi, nous sommes en mesure de déterminer, pour une configuration donnée du système examiné, la probabilité d'avoir tel ou tel événement.

Le calcul de la probabilité des *Top Events* sachant la réunion de plusieurs événements intermédiaires est donc accessible. Par exemple, la probabilité d'occurrence du *Top Event*  $E_k^{(TE)}$  sachant  $E_{k'}^{(TE-1)}$  ou  $E_{k''}^{(TE-1)}$  est donnée par la relation :

$$\Pr \left( E_k^{(TE)} \mid E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right) = \frac{\Pr \left( E_k^{(TE)} \cap \left( E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right) \right)}{\Pr \left( E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right)} \quad (8.34)$$

où le numérateur se développe de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \Pr \left( E_k^{(TE)} \cap \left( E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right) \right) \\ &= \Pr \left( E_k^{(TE)} \right) + \Pr \left( E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right) - \Pr \left( E_k^{(TE)} \cup E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right) \end{aligned} \quad (8.35)$$

La probabilité  $\Pr \left( E_k^{(TE)} \right)$  est connue d'après les résultats de la sous-section précédente. Les probabilités  $\Pr \left( E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right)$  et  $\Pr \left( E_k^{(TE)} \cup E_{k'}^{(TE-1)} \cup E_{k''}^{(TE-1)} \right)$  peuvent être estimées à partir de la relation 8.33.

### 8.3.4 Exemple : déformations d'un axe de piston

Nous illustrons ici l'ensemble de ces produits au moyen de l'étude des déformations de l'axe de piston de l'exemple conducteur défini dans le chapitre 3. Nous examinons trois fonctions de performance relatives à la flexion de l'axe, à son ovalisation et à la charge qui s'exerce sur ses bossages. Chacun de ces critères a une conséquence directe sur la prédisposition de l'axe au grippage. Nous ajoutons également que la définition du système étudié correspond à un dimensionnement préliminaire voué à évoluer au cours d'itérations de conception ultérieures.

Le tableau 8.1 donne les probabilités marginales d'occurrence respectives des événements relatifs au non respect des critères de flexion et d'ovalisation ainsi que la probabilité de dépassement de la charge critique appliquée au niveau des bossages d'axe. Afin de préserver leur confidentialité, les résultats  $P_{f_k}^{(l)}$  et  $\beta_k^{(l)}$  sont normés par rapport aux valeurs cibles  $P_{f_{ref}}$  et  $\beta_{ref}$ , non communiquées.  $P_{f_k}^{(l)} / P_{f_{ref}} \approx 1$  (*resp.*  $\beta_k^{(l)} / \beta_{ref} \approx 1$ ) signifie que la conception est satisfaisante relativement aux objectifs de fiabilité.  $P_{f_k}^{(l)} / P_{f_{ref}} > 1$  (*resp.*  $\beta_k^{(l)} / \beta_{ref} < 1$ ) et  $P_{f_k}^{(l)} / P_{f_{ref}} < 1$  (*resp.*  $\beta_k^{(l)} / \beta_{ref} > 1$ ) qualifient des conceptions non satisfaisantes, respectivement sous et sur



dimensionnées vis-à-vis de la fiabilité. A cette étape de la conception, le critère d'ovalisation n'est donc pas satisfait alors que les deux autres critères sont surabondants. Par conséquent, la définition technique du système doit être améliorée au cours des itérations de conception suivantes. Dans la suite, nous montrons comment la méthodologie, que nous proposons, participe à la définition d'arguments d'aide au dimensionnement et à l'amélioration de la conception pour la fiabilité.

Le tableau 8.2 fournit les coefficients de corrélation des états limites relatifs au grippage de l'axe de piston. Il montre que les trois états limites sont fortement corrélés, ce à quoi nous pouvions nous attendre étant donnée leur dépendance physique.

Le tableau 8.3 donne les probabilités de l'intersection et de l'union des événements (1), (2) et (3).

Enfin, le tableau 8.4 illustre les probabilités d'occurrence des événements sachant l'occurrence d'événements précurseurs. Par exemple, nous voyons de cette manière que la probabilité d'occurrence de (2) augmente de manière non négligeable dès lors que l'on observe (1). En revanche, le fait d'observer (3) n'a aucune influence sur la probabilité d'occurrence de (1).

	(1)	(2)	(3)
Probabilité (normée)	$5,2 \times 10^{-5}$	0,17	91,14
Indice de fiabilité (normé)	2,12	1,26	0,87

(1) - Critère de flexion non respecté.

(2) - Dépassement du chargement critique des bossages.

(3) - Critère d'ovalisation de l'axe non respecté

TAB. 8.1 – Déformations de l'axe de piston : probabilités de défaillance marginales.

Corrélation	(1)	(2)	(3)
(1)	1	0,617	0,947
(2)	0,617	1	0,778
(3)	0,947	0,778	1

TAB. 8.2 – Déformations de l'axe de piston : corrélation des états limites.

	(1) et (2)	(2) et (3)	(1) et (3)
Probabilité (normée)	$3,2 \times 10^{-5}$	0,17	$5,2 \times 10^{-5}$
	(1) ou (2)	(2) ou (3)	(1) ou (3)
Probabilité (normée)	0,17	91,14	91,14

TAB. 8.3 – Déformations de l'axe de piston : défaillance séries/parallèles.

### 8.3.5 Conclusion

Cette section a d'abord précisé les multiples stratégies permettant d'estimer des probabilités de défaillance ou de performance dégradée aux différents niveaux des

Probabilité (normée) de	(1)	(2)	(3)
sachant (1)	—	56,68	93,17
sachant (2)	0,02	—	93,17
sachant (3)	$5,3 \times 10^{-5}$	0,18	—

TAB. 8.4 – Déformations de l’axe de piston : probabilités conditionnelles.

scénarios de défaillance phénoménologiques. Elle a ensuite posé les bases de la méthodologie assurant l’évaluation et l’exploitation des coefficients de corrélation entre états limites. Les produits majeurs de cette dernière se situent au niveau de la détermination de la probabilité d’occurrence des *Top Events* et de tout autre événement intermédiaire, conditionnée par l’occurrence de différentes séquences d’événements précurseurs.

Si cette approche basée sur la détermination des corrélations entre les divers états limites fournit des informations très intéressantes, elle ne renseigne pas sur les sensibilités des *Top Events* aux événements intermédiaires et aux paramètres de conception. En d’autres mots, elle ne donne pas d’information précise sur l’évolution de la probabilité de défaillance du *Top Events* en réponse à une faible variation d’un paramètre de conception ou d’un paramètre intermédiaire. La section suivante apporte des éléments de réponse à cette problématique.

## 8.4 Chaînes de facteurs d’importance - arbres d’influence

Le terme “facteurs d’importance” regroupe les sensibilités des comportements physiques ( $M_k^{(l)}$  et  $G_k^{(l)}$ ) et des mesures de fiabilité ( $P_{f_k}^{(l)}$  et  $\beta_k^{(l)}$ ) à certains paramètres du problème, notamment :

- les variables aléatoires, élémentaires  $\mathbf{X}^{(0)}$  ou intermédiaires  $\mathbf{X}^{(l)}$  ;
- les paramètres  $\theta_{f_k}^{(l)}$  de leurs lois de distributions, tels que la moyenne et l’écart-type ;
- les paramètres  $\theta_{G_k}^{(l)}$  (*resp.*  $\theta_{G_k}^{(l)}$ ) des fonctions de performance  $G_k^{(l)}$  (*resp.* des fonctions de transfert  $M_k^{(l)}$ ).

Ces facteurs permettent d’identifier les sources d’incertitudes les plus importantes dans la fiabilité en mesurant l’impact d’une petite évolution d’un paramètre sur la variation d’un paramètre cible.

Ici, il s’agit en particulier d’identifier l’effet, en chaîne, de la variation des paramètres élémentaires et intermédiaires sur :

- les variations des paramètres de niveaux supérieurs et du niveau terminal,
- les variations des mesures de fiabilité qui leur sont associées.

La finalité consiste à caractériser les paramètres et les phénomènes les plus influents ainsi que les séquences phénoménologiques les plus critiques au regard de la fiabilité.

### 8.4.1 Facteurs nodaux de sensibilité

Les facteurs d’importance nodaux sont classiquement obtenus à la suite des analyses *FORM* suivant la stratégie de traitement n°1. Si on considère le nœud  $k$  de niveau  $l$ , il assure l’estimation des sensibilités de  $M_k^{(l)}$  ou  $G_k^{(l)}$  et des mesures de fiabilité  $P_{f_k}^{(l)}$

et  $\beta_k^{(l)}$  par rapport aux variables du vecteur  $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}$  du niveau  $l-1$ . Nous les présentons de manière générique et détaillée dans l'annexe E, en précisant l'interprétation qualitative que l'on peut en faire. Nous synthétisons ici l'information dans le tableau 8.5, en utilisant les notations propres à notre problématique.

Sensibilité mécanique de $M_k^{(l)}$ et $G_k^{(l)}$	Expression
aux paramètres physiques $\check{\mathbf{x}}$ aux paramètres de $M_k^{(l)}$ , $\boldsymbol{\theta}_M = \boldsymbol{\theta}_{M_k}^{(l)}$ aux paramètres de $G_k^{(l)}$ , $\boldsymbol{\theta}_G = \boldsymbol{\theta}_{G_k}^{(l)}$	$\nabla_{i \check{\mathbf{x}}} M_k^{(l)}(\check{\mathbf{x}}) = \nabla_{i \check{\mathbf{x}}} G_k^{(l)}(\check{\mathbf{x}})$ $\nabla_{i \boldsymbol{\theta}_M} M_k^{(l)}(\check{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}_M)$ $\nabla_{i \boldsymbol{\theta}_G} G_k^{(l)}(\check{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}_G)$
Sensibilité de $\beta_k^{(l)}$	Expression
aux variables aléatoires $\check{\mathbf{u}} = \check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)}$ aux variables aléatoires $\check{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l-1)}$ aux paramètres $\boldsymbol{\theta}_f^{(l)} = \boldsymbol{\theta}_f$ aux paramètres $\boldsymbol{\theta}_G^{(l)} = \boldsymbol{\theta}_G$	$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \check{u}_i} \right _{\check{\mathbf{u}}^*} = -\alpha_i = - \frac{\nabla_i H_k^{(l)}(\check{\mathbf{u}})}{\ \nabla H_k^{(l)}(\check{\mathbf{u}})\ } \Big _{\check{\mathbf{u}}^*}$ $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \check{x}_i} \right _{\check{\mathbf{u}}^*} = - \sum_j \alpha_j \left. \frac{\partial T_j(\check{\mathbf{x}})}{\partial \check{x}_i} \right _{\check{\mathbf{u}}^*}$ $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^{x_r}} \right _{\check{\mathbf{x}}^*} = \sum_j \frac{\check{u}_j^*}{\beta} \left. \frac{\partial T_j(\check{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \theta_{f_i}^{x_r}} \right _{\check{\mathbf{x}}^*}$ $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{G_i}} \right _{\check{\mathbf{u}}^*} = \frac{1}{\ \nabla H_k^{(l)}(\check{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\theta}_G)\ } \left. \frac{\partial H_k^{(l)}(\check{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\theta}_G)}{\partial \theta_{G_i}} \right _{\check{\mathbf{u}}^*}$
Sensibilités de $P_{f_k}^{(l)}$	Expression
à un paramètre quelconque $\theta_i$	$\left. \frac{\partial P_{f_k}^{(l)}}{\partial \theta_i} \right _{\check{\mathbf{u}}^*} = -\varphi(\beta) \left. \frac{\partial \beta_k^{(l)}}{\partial \theta_i} \right _{\check{\mathbf{u}}^*}$

N.B. :  $\check{\mathbf{u}}^* = \check{\mathbf{u}}_{k,l}^{*(l-1)}$  est le point de conception lié à l'état limite  $G_k^{(l)}(\check{\mathbf{x}}_{k,l}^{(l-1)})$ .

TAB. 8.5 – Facteurs d'importance mécaniques et fiabilistes nodaux.

### 8.4.2 Construction de chaînes de facteurs d'importance

#### Chaînes de facteurs d'importance mécaniques/physiques

La construction de chaînes de sensibilités mécaniques ne pose pas de difficultés particulières (si ce n'est éventuellement le calcul des gradients pour des modèles mécaniques complexes). L'application simple et classique de la règle de différenciation en chaîne suffit à l'obtention de la chaîne complète.

D'abord, une analyse "court-circuit" sur la totalité de l'arbre conduit à l'obtention des sensibilités mécaniques globales, notées  $s_i^{(TE/0)}_k$  que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$s_i \big|_k^{(TE/0)} = \frac{\partial G_k^{(TE/0)}}{\partial X_i^{(0)}} = \nabla_{i|\mathbf{X}^{(0)}} G_k^{(TE/0)} \quad (8.36)$$

où :

- $TE/0$  signifie que l'on considère le niveau  $TE$  par rapport aux variables du niveau élémentaire 0,
- $G_k^{(TE/0)}$  désigne la  $k$ -ième fonction d'état limite définie au niveau  $TE$ ,
- $X_i^{(0)}$  désigne la  $i$ -ième variable du vecteur  $\mathbf{X}^{(0)}$  des paramètres du niveau élémentaire de taille  $nva_0$ .

En reprenant les éléments de définition formelle introduits au cours du chapitre 5 et en particulier l'équation 2.4, il vient :

$$s_i \big|_k^{(TE/0)} = \frac{\partial G_k^{(TE/0)}}{\partial X_i^{(0)}} = \frac{\partial M_k^{(TE/0)}}{\partial X_i^{(0)}} = \frac{\partial X_k^{(TE/0)}}{\partial X_i^{(0)}} = \nabla_{i|\mathbf{X}^{(0)}} X_k^{(TE/0)} \quad (8.37)$$

Cette dernière relation permet d'identifier, de manière globale, la variation de la réponse de la fonction de performance associée aux *Top Events* lors de l'évolution d'une variable de conception élémentaire. En revanche, cela ne permet ni de mesurer la variation de la réponse de cette fonction de performance due à la variation d'un paramètre intermédiaire ni d'obtenir une idée de la distribution de son influence globale à travers chacun des scénarios qu'il impacte.

Pour cela, il est nécessaire d'écrire le gradient  $\nabla_{i|\mathbf{X}^{(0)}} G_k^{(TE/0)}$  en faisant intervenir les transformations mécaniques intermédiaires. En fait, on a :

$$M_k^{(TE/0)}(\mathbf{X}^{(0)}) = X_k^{(TE/0)} = M_k^{(TE)} \circ \mathbf{M}^{(TE-1)} \circ \dots \circ \mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{X}^{(0)}) \quad (8.38)$$

où  $\circ$  est l'opérateur mathématique de composition classique. La règle de différenciation en chaîne permet d'écrire successivement :

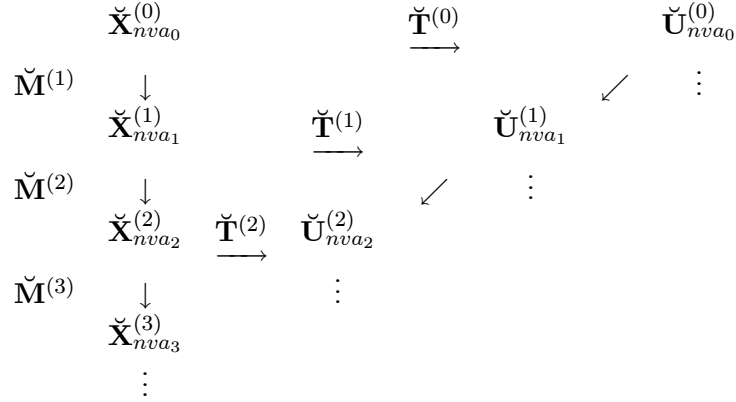
$$\nabla_{i|\mathbf{X}^{(0)}}^T X_k^{(TE)} = \nabla_{i|\mathbf{X}^{(TE-1)}}^T X_k^{(TE)} \mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(TE-1)}\mathbf{X}^{(0)}} \quad (8.39)$$

$$= \nabla_{i|\mathbf{X}^{(TE-1)}}^T X_k^{(TE)} \mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(TE-1)}\mathbf{X}^{(TE-2)}} \mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(TE-2)}\mathbf{X}^{(0)}} \quad (8.40)$$

$$= \nabla_{i|\mathbf{X}^{(TE-1)}}^T X_k^{(TE)} \mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(TE-1)}\mathbf{X}^{(TE-2)}} \dots \mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(0)}} \quad (8.41)$$

Le calcul pas à pas du gradient  $\nabla_{i|\mathbf{X}^{(0)}}^T X_k^{(TE)}$ , exprimé sous la forme de l'équation 8.41, permet d'obtenir les informations que nous recherchons. En outre, en développant le membre de droite de cette relation,  $\nabla_{i|\mathbf{X}^{(0)}}^T X_k^{(TE)}$  s'écrit sous la forme d'une somme dont chacun des termes représente la contribution d'une des branches des arbres de défaillance phénoménologiques étudiés.

En fait, la détermination des sensibilités mécaniques en chaque nœud de ces scénarios de défaillance, suivant le schéma de calcul n°1 de la figure 8.2 permet de construire les matrices Jacobiennes  $\mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(l)}\mathbf{X}^{(l-1)}} = \left[ \partial X_i^{(l)} / \partial X_j^{(l-1)} \right]$  caractérisant le passage de niveau en niveau. Le seul problème qui se pose est d'évaluer les matrices Jacobiennes



TAB. 8.6 – Tableau récapitulatif des transformations de niveau en niveau.

en des points de calcul représentatifs  $\mathbf{X}_{rep}^{(l)}$  équivalents. Par exemple, si on choisit de réaliser le calcul de  $\nabla_{|\mathbf{X}^{(0)}}^T X_k^{(TE)}$  en  $\mathbf{X}_{rep}^{(0)}$  alors il faudra évaluer :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(0)}}|_{\mathbf{X}_{rep}^{(0)}} \quad (8.42)$$

puis :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(2)}\mathbf{X}^{(1)}}|_{\mathbf{X}_{rep}^{(1)}=\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{X}_{rep}^{(0)})} \quad (8.43)$$

et ainsi de suite. Ceci peut engendrer un effort de calcul supplémentaire non négligeable, en particulier lorsque la détermination des gradients nécessite l'évaluation d'un modèle complexe (*e.g.* éléments finis) et impose le recours à une procédure numérique. Toutefois, c'est le prix à payer pour obtenir ce genre d'informations supplémentaires.

Finalement, en étant vigilant, c'est-à-dire en évaluant tous les gradients au même point représentatif, il est possible de caractériser les sensibilités mécaniques des phénomènes physiques et des fonctions de performance définies à n'importe quel niveau des scénarios de défaillance par rapport à n'importe quel autre phénomène ou paramètre physique qui l'impacte. L'avantage d'une telle approche reposant sur l'implémentation des stratégies n°1, 2 et 3 est qu'elle est en mesure de fournir :

1. l'influence globale des paramètres d'un niveau donné sur les phénomènes physiques qu'ils impactent aux niveaux supérieurs,
2. l'influence des paramètres d'un niveau donné à travers chaque branche dans lesquelles ils interviennent. Autrement dit, nous mesurons la manière dont l'influence globale des paramètres se distribue dans chaque scénario.

### Chaîne de facteurs de sensibilité fiabiliste

La construction de la chaîne des sensibilités fiabilistes n'est pas aussi directe que la construction de la chaîne des sensibilités mécaniques. En effet, cette fois nous ne travaillons pas seulement dans l'espace des variables physiques mais également dans l'espace des variables normales centrées normées. L'évaluation des sensibilités fiabilistes se fait en un point particulier, le point de conception  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}$  (le point de défaillance le plus

$$\begin{aligned}
H_k^{(1)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,1}^{(0)} \right) &= M_k^{(1)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,1}^{(0)-1} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,1}^{(0)} \right) - \gamma_k^{(1)} \\
H_k^{(2)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,2}^{(1)} \right) &= M_k^{(2)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,2}^{(1)-1} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,2}^{(1)} \right) - \gamma_k^{(2)} \\
H_k^{(3)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,3}^{(2)} \right) &= M_k^{(3)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,3}^{(2)-1} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,3}^{(2)} \right) - \gamma_k^{(3)} \\
&\vdots \\
H_k^{(TE)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \right) &= M_k^{(TE)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(TE-1)-1} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \right) - \gamma_k^{(TE)}
\end{aligned}$$

TAB. 8.7 – Etats limites intermédiaires et terminaux dans l'espace normal standard.

probable), pour chaque état limite  $G_k^{(l)}$  considéré et ce au moyen d'une procédure numérique algorithmique (Annexe E). Le tableau 8.6 illustre les diverses transformations entrant en jeu à chaque niveau et entre chaque niveau des scénarios de défaillance. Le tableau 8.7 donne l'expression des états limites intermédiaires et globaux dans l'espace normal standard.

### Tentative d'application de la règle de différenciation en chaîne

Dans un premier temps, le problème qui se pose est de savoir si l'on peut exprimer de manière simple le gradient de la  $k$ -ième fonction de performance du niveau  $TE$  par rapport aux variables élémentaires exprimées dans l'espace normal standard (Eq. 8.44), en fonction des sensibilités fiabilistes intermédiaires (Eq. 8.45), en considérant la règle de différenciation en chaîne.

$$\nabla_{|\check{\mathbf{U}}_{k,TE/0}^{(0)}} H_k^{(TE/0)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE/0}^{(0)} \right) \quad (8.44)$$

$$\nabla_{|\check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(l-1)}} H_k^{(l)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(l-1)} \right), l = 1 \dots TE, k = 1 \dots N_{cl} \quad (8.45)$$

Tout d'abord, on a :

$$H_k^{(TE)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \right) = M_k^{(TE)} \left( \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(TE-1)-1} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \right) \right) - \gamma_k^{(TE)} \quad (8.46)$$

D'après le tableau 8.6, on voit clairement que l'on a :

$$\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} = \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(TE-1)} \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(TE-1)} \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(TE-2)} \circ \dots \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(2)} \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(1)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(0)-1} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \right) \quad (8.47)$$

d'où de manière théorique :

$$\begin{aligned}
H_k^{(TE)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \right) &= M_k^{(TE)} \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(TE-1)} \circ \dots \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(1)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(0)-1} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \right) - \gamma_k^{(TE)} \\
&= H_k^{(TE/0)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \right)
\end{aligned} \quad (8.48)$$

Maintenant, on s'intéresse à l'expression du gradient de  $H_k^{(TE/0)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \right)$  par rapport aux éléments du vecteur  $\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)}$  de variables du niveau 0. D'après les relations

8.47 et 8.48, la règle de différenciation en chaîne permet d'écrire successivement :

$$\nabla_{|\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)}} H_k^{(TE/0)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \right) = \nabla_{|\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)}} H_k^{(TE)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \right) \quad (8.49)$$

$$= \nabla_{|\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)}}^T H_k^{(TE)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \right) \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \quad (8.50)$$

$$= \nabla_{|\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(TE-1)}}^T X_k^{(TE)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \quad (8.51)$$

$$= \nabla_{|\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(TE-1)}}^T X_k^{(TE)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)} \dots \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \quad (8.52)$$

Dans la mesure où l'on cherche à construire une chaîne de mesures d'importance à partir des mesures de sensibilités nodales, toute la difficulté consiste à les faire apparaître dans la relation 8.52. En fait, ces grandeurs sont estimées en chaque nœud, en un point particulier qui correspond au point de conception  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}$  obtenu pour chaque état limite  $G_k^{(l)}$ . Par exemple, au nœud  $k$  de passage du niveau  $l-1$  au niveau  $l$ , une autre expression des cosinus directeurs (Tab. 8.5) est obtenue de la façon suivante :

$$\check{\alpha}_k^{(l/l-1)} = \frac{\nabla_{|\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}}^T X_k^{(l)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(l-1)}}{\left\| \nabla_{|\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}}^T X_k^{(l)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(l-1)} \right\|} \bigg|_{\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}} \quad (8.53)$$

Si l'on note  $\check{\mathbf{a}}_k^{(l/l-1)}$  le dénominateur de  $\check{\alpha}_k^{(l/l-1)}$  alors pour le passage du niveau  $l-1$  au niveau  $l$ , on a :

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{a}}^{(l/l-1)} &= \left\{ \begin{array}{c} \nabla_{|\check{\mathbf{X}}_{1,l}^{(l-1)}}^T X_1^{(l)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{1,l}^{(l-1)}} \check{\mathbf{U}}_{1,l}^{(l-1)} \big|_{\check{\mathbf{u}}_{1,l}^{(l-1)*}} \\ \vdots \\ \nabla_{|\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}}^T X_k^{(l)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(l-1)} \big|_{\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}} \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l)} \check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(l-1)} \big|_{\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}} \end{aligned} \quad (8.54)$$

En fait, on est tenté de faire apparaître les sensibilités fiabilistes  $\mathbf{a}^{(l)}$  dans l'expression 8.52, en écrivant d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-2)} &= \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-2)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-2)}} \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-2)} \\ &= \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)} \check{\mathbf{a}}^{(l/l-1)} \end{aligned} \quad (8.55)$$

puis :

$$\begin{aligned} \nabla_{|\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)}} H_k^{(TE/0)} \left( \check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(0)} \right) &= \check{\mathbf{a}}_k^{(TE/TE-1)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)} \mathbf{a}^{(TE-1/TE-2)} \dots \\ &\dots \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(TE-2)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-2)} \mathbf{a}^{(TE-2/TE-3)} \\ &\dots \mathbf{J}_{\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(1)} \mathbf{a}^{(1/0)} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Seulement, ceci n'a de sens que si les différentes quantités sont évaluées en un point particulier. En effet, il faut être extrêmement prudent car cette expression n'est valable que si l'ensemble des matrices Jacobiennes est évalué en des points représentatifs du point de conception global  $\check{\mathbf{u}}_{k,TE}^{(0)*}$ . Or, il n'y a aucune raison pour que les points de conception intermédiaires,  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}$ ,  $l = 1, \dots, TE$  et  $k = 1, \dots, nva_l$ , déterminés indépendamment les uns des autres en chaque nœud des scénarios, soient identiques et représentatifs du point de défaillance le plus probable global  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(0)*}$ . De plus, cette expression ne fait apparaître que les sensibilités fiabilistes non normées et non les cosinus directeurs.

Toute la complexité de la reconstruction de la chaîne consisterait donc à être en mesure de calculer l'ensemble des  $\check{\mathbf{a}}_k^{(l/l-1)}$  en des points de conception  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}$  représentatifs du point de conception global  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(0)*}$ , ce dernier étant conditionné par la fonction d'état limite  $G_k^{(TE/0)}$ . Ce qui pose un problème supplémentaire, c'est que les cosinus directeurs  $\check{\mathbf{a}}_k^{(l/l-1)}$  (et donc les vecteurs  $\check{\mathbf{a}}_k^{(l/l-1)}$ ) sont déterminés au moyen d'un algorithme d'optimisation, qui détermine également les  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}$ . En d'autres termes, il faudrait pouvoir faire en sorte que l'algorithme détermine à coup sûr les  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l-1)*}$  correspondants au  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(0)*}$  en modifiant les fonctions de performance intermédiaires. Nous pourrions alors envisager de reconstruire la chaîne au moyen de cette méthode.

Ainsi si les calculs des cosinus directeurs au niveau 0 sont réalisés en  $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(0)*}$ , au niveau 1 ils devraient l'être en :

$$\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(1)*} = \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(1)} \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(1)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(0)-1} \left( \check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(0)*} \right) \quad (8.57)$$

au niveau 2 en :

$$\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(2)*} = \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(2)} \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(2)} \circ \check{\mathbf{M}}_{k,TE}^{(1)} \circ \check{\mathbf{T}}_{k,TE}^{(0)-1} \left( \check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(0)*} \right) \quad (8.58)$$

et ainsi de suite. Cependant, nous voyons bien que cette manière de construire la chaîne des mesures d'importance n'est pas naturelle et imposerait de modifier les états limites intermédiaires ; ce qui finalement n'aurait plus guère de sens. Il est donc nécessaire de regarder le problème sous un angle différent.

### Exploitation du schéma de calcul n°3 des “courts-circuits” montants

D'après ce que l'on vient de voir dans le paragraphe précédent, il semblerait plus judicieux d'envisager la construction de la chaîne en prenant pour référence le niveau final comme c'est le cas dans le schéma de calcul n°3 de la figure 8.2. Nous rappelons que celui-ci n'est réalisable que dans la mesure où une progression suivant le schéma de calcul n°1 de la même figure a été mise en œuvre pour identifier les fonctions de densité de probabilité de tous les paramètres de l'arbre continu.

En procédant de cette manière, et en réalisant des analyses *FORM*, on obtient dans un premier temps :



- les cosinus directeurs de la fonction de performance finale exprimée par rapport au niveau  $l$  et au nœud  $k$  considérés :

$$\check{\alpha}_k^{(TE/l)} \Big|_{\check{\mathbf{u}}_{k,TE}^{(l)*}} \quad (8.59)$$

- les sensibilités de l'indice de fiabilité (correspondant à un *Top Event* donné) aux variables aléatoires  $\check{\mathbf{U}}_{k,TE}^{(l)}$  :

$$\frac{\partial \beta_k^{(TE/l)}}{\partial \check{U}_{i,k,TE}^{(l)}} \Big|_{\check{\mathbf{u}}_{k,TE}^{(l)*}} = -\check{\alpha}_i^{(TE/l)} \quad (8.60)$$

- les sensibilités de l'indice de fiabilité aux variables physiques  $\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l)}$  :

$$\frac{\partial \beta_k^{(TE/l)}}{\partial \check{X}_{i,k,TE}^{(l)}} = - \sum_j \check{\alpha}_j^{(TE/l)} \frac{\partial T_j(\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l)})}{\partial \check{X}_{i,k,TE}^{(l)}} \quad (8.61)$$

- les sensibilités de la probabilité de défaillance (correspondant aux *Top Events*) aux variables  $\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l)}$  :

$$\frac{\partial P_{f,k}^{(TE/l)}}{\partial \check{X}_{i,k,TE}^{(l)}} = -\varphi\left(\beta_k^{(TE/l)}\right) \frac{\partial \beta_k^{(TE/l)}}{\partial \check{X}_{i,k,TE}^{(l)}} \quad (8.62)$$

L'intérêt de cette approche, comme nous l'avons déjà évoqué, est de caractériser l'influence globale des paramètres, à chaque niveau  $l$  du formalisme, sur les mesures de fiabilité relatives aux *Top Events*. Nous montrons maintenant comment il est possible d'utiliser ces résultats pour identifier l'influence de ces mêmes paramètres sur les mesures de fiabilité des *Top Events* à travers chaque branche de l'arbre. L'objectif est d'apporter une information supplémentaire participant à l'effort d'identification des branches les plus critiques.

En toute rigueur, si les fonctions de densité de probabilité des variables intermédiaires  $X_k^{(l)}$ ,  $l = 0 \dots TE$ ,  $k = 1 \dots n_l$  sont connues de manière exacte, en considérant le schéma de calcul n°3 de la figure 8.2, on a l'égalité :

$$\beta_k^{(TE/0)} = \beta_k^{(TE/1)} = \dots = \beta_k^{(TE/TE-1)} \quad (8.63)$$

et :

$$\check{\mathbf{x}}_{k,TE}^{(1)*} = \check{\mathbf{M}}^{(1)}\left(\check{\mathbf{x}}_{k,TE}^{(0)*}\right) \quad (8.64)$$

$$\check{\mathbf{x}}_{k,TE}^{(l)*} = \check{\mathbf{M}}^{(l)} \circ \dots \circ \check{\mathbf{M}}^{(1)}\left(\check{\mathbf{x}}_{k,TE}^{(0)*}\right) \quad (8.65)$$

$$x_k^{(TE)*} = M_k^{(TE)} \circ \check{\mathbf{M}}^{(TE-1)} \circ \dots \circ \check{\mathbf{M}}^{(1)}\left(\check{\mathbf{x}}_{k,TE}^{(0)*}\right) \quad (8.66)$$

L'application simple de la règle de différenciation permet alors d'écrire :

$$\nabla_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)}}^T \beta_k^{(TE/0)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)*}} = \left( \nabla_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l)}}^T \beta_k^{(TE/l)} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)} \right) \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)*}} \quad (8.67)$$

De la relation 8.67, on tire l'expression de chaque sensibilité  $\partial \beta_k^{(TE/0)} / \partial \check{X}_i^{(0)}_{k,TE}$  :

$$\frac{\partial \beta_k^{(TE/0)}}{\partial \check{X}_i^{(0)}_{k,TE}} = \sum_j \frac{\partial \beta_k^{(TE/l)}}{\partial \check{X}_j^{(l)}_{k,TE}} \frac{\partial \check{X}_j^{(l)}_{k,TE}}{\partial \check{X}_i^{(0)}_{k,TE}} \quad (8.68)$$

Chaque terme de la somme désigne l'influence de  $\check{X}_i^{(0)}_{k,TE}$  sur l'indice de fiabilité correspondant au *Top Event*  $k$  à travers la branche  $j$  du niveau  $l$ .

Maintenant, de manière identique à la relation 8.67, il est possible d'écrire :

$$\nabla_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)}}^T \beta_k^{(TE/0)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)*}} = \nabla_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)*}}^T \beta_k^{(TE/TE-1)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)*}} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)*}} \quad (8.69)$$

Afin de faire apparaître toutes les branches de l'arbre et d'évaluer l'influence des paramètres élémentaires à travers chacune d'entre elles, on propose de décomposer la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)}$ . Le nombre total de branches de l'arbre est conditionné par la multiplicité<sup>3</sup> des variables impliquées dans les scénarios, élémentaires comme intermédiaires. Il vient :

$$\begin{aligned} \nabla_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)}}^T \beta_k^{(TE/0)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)*}} &= \nabla_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)*}}^T \beta_k^{(TE/TE-1)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)*}} \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-2)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(TE-2)*}} \dots \\ &\quad \dots \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l-1)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(l-1)*}} \dots \mathbf{J}_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(1)}} \check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)} \Big|_{\check{\mathbf{X}}_{k,TE}^{(0)*}} \end{aligned} \quad (8.70)$$

A partir de 8.70, on obtient une expression alternative à celle de l'équation 8.68 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_k^{(TE/0)}}{\partial \check{X}_i^{(0)}_{k,TE}} &= \sum_j \left( \frac{\partial \beta_k^{(TE/TE-1)}}{\partial \check{X}_j^{(TE-1)}_{k,TE}} \sum_p \left( \frac{\partial \check{X}_j^{(TE-1)}_{k,TE}}{\partial \check{X}_p^{(TE-2)}_{k,TE}} \sum_q \left( \frac{\partial \check{X}_p^{(TE-2)}_{k,TE}}{\partial \check{X}_q^{(TE-3)}_{k,TE}} \dots \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \dots \sum_s \left( \frac{\partial \check{X}_r^{(3)}_{k,TE}}{\partial \check{X}_s^{(2)}_{k,TE}} \sum_t \frac{\partial \check{X}_s^{(2)}_{k,TE}}{\partial \check{X}_t^{(1)}_{k,TE}} \frac{\partial \check{X}_t^{(1)}_{k,TE}}{\partial \check{X}_i^{(0)}_{k,TE}} \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (8.71)$$

Seuls les termes correspondant à des branches impactées par  $\check{X}_i^{(0)}_{k,TE}$  sont non nuls. Ils caractérisent l'influence de  $\check{X}_i^{(0)}_{k,TE}$  au sein de chacune de ces branches. Ce type de décomposition peut être réalisé en référence à n'importe quel niveau  $l$  des scénarios.

<sup>3</sup>Par multiplicité d'une variable, nous entendons le nombre de transformations mécaniques pour lesquelles elle constitue une donnée d'entrée.

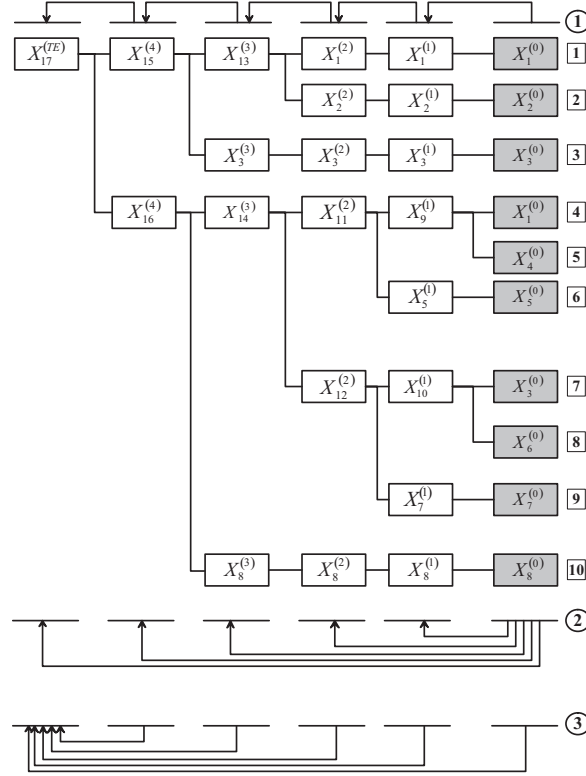


FIG. 8.3 – Un premier exemple de scénario théorique.

### 8.4.3 Exemples

#### Exemple théorique n°1

Nous considérons l'exemple de l'arbre illustré dans la figure 8.3. Les huit paramètres élémentaires sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{X}^{(0)}$  de dimension 8. Les variables  $X_1^{(0)}$  et  $X_3^{(0)}$  interviennent dans deux branches différentes. D'après la figure 8.3, dix chemins conduisent à l'unique variable sommet  $X_1^{(TE)}$ . Notre objectif consiste à caractériser le poids de  $X_1^{(0)}$  à travers chacune des branches qu'elle est susceptible d'impacter (c'est-à-dire les branches 1 et 4) :

- $X_1^{(0)}$  intervient dans la branche 1 en entrée du modèle déterminant la variable  $X_1^{(1)}$  ; la transformation n'est autre que l'identité dans ce cas.
- $X_1^{(0)}$  joue également un rôle dans la branche 4 en entrée du modèle déterminant  $X_9^{(1)}$ .

$X_1^{(1)}$  et  $X_9^{(1)}$  n'influencent le *Top Event* qu'à travers une seule branche. Nous pouvons donc évaluer l'importance globale de  $X_1^{(0)}$  au moyen de :

$$\frac{\partial \beta^{(TE/0)}}{\partial X_1^{(0)}} = \nabla_{\mathbf{X}^{(1)}}^T \beta^{(TE/1)} \mathbf{J}_{\mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(0)}} |_{\mathbf{x}^{(0)*}} \quad (8.72)$$

avec :

$$\nabla_{\mathbf{x}^{(1)}}^T \beta^{(TE/1)} = \left[ \frac{\partial \beta^{(TE/1)}}{\partial X_1^{(1)}} \quad \dots \quad \frac{\partial \beta^{(TE/1)}}{\partial X_9^{(1)}} \quad \frac{\partial \beta^{(TE/1)}}{\partial X_{10}^{(1)}} \right] \quad (8.73)$$

et :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(0)}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ \frac{\partial X_9^{(1)}}{\partial X_1^{(0)}} & 0 & 0 & \frac{\partial X_9^{(1)}}{\partial X_4^{(0)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{\partial X_{10}^{(1)}}{\partial X_3^{(0)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial X_{10}^{(1)}}{\partial X_7^{(0)}} & 0 & 0 & \end{bmatrix} \quad (8.74)$$

d'où :

$$\frac{\partial \beta^{(TE/0)}}{\partial X_1^{(0)}} = \frac{\partial \beta^{(TE/1)}}{\partial X_1^{(1)}} + \frac{\partial \beta^{(TE/1)}}{\partial X_9^{(1)}} \frac{\partial X_9^{(1)}}{\partial X_1^{(0)}} \quad (8.75)$$

Les termes à droite de l'égalité 8.75 représentent respectivement l'influence de  $X_1^{(0)}$  sur  $\beta^{(TE/0)}$  dans la branche 1 et l'influence de  $X_1^{(0)}$  sur  $\beta^{(TE/0)}$  dans la branche 4. Une analyse *FORM* de type court-circuit suivant le schéma de calcul n°3 permet d'évaluer  $\nabla_{\mathbf{x}^{(1)}}^T \beta^{(TE/1)}$ . La sensibilité mécanique  $\partial X_9^{(1)} / \partial X_1^{(0)}$  est ensuite déterminée au point de conception global  $\mathbf{x}^{(0)*}$  (obtenu par une analyse *FORM* du *Top Event* par rapport au niveau élémentaire). De la même manière, on obtient pour  $X_3^{(0)}$  :

$$\frac{\partial \beta^{(global/0)}}{\partial X_3^{(0)}} = \frac{\partial \beta^{(global/1)}}{\partial X_3^{(1)}} + \frac{\partial \beta^{(global/1)}}{\partial X_{10}^{(1)}} \frac{\partial X_{10}^{(1)}}{\partial X_3^{(0)}} \quad (8.76)$$

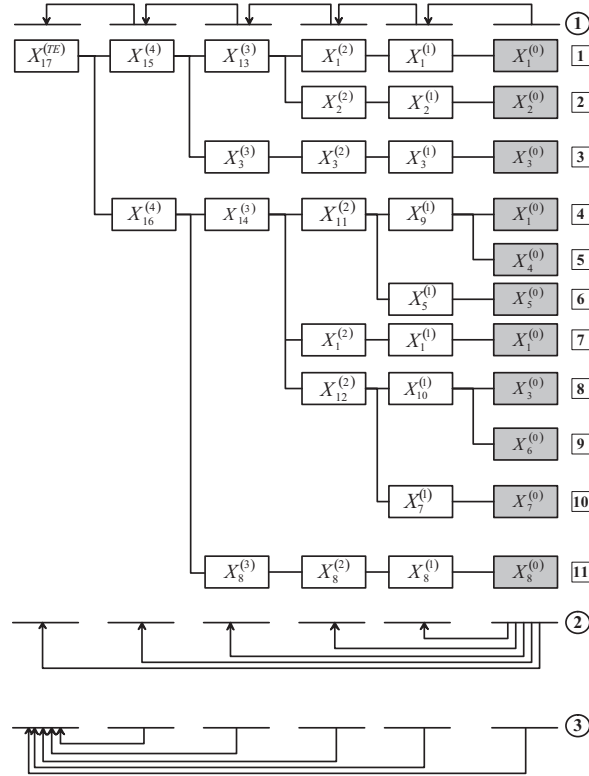
### Exemple théorique n°2

Nous considérons, maintenant, l'exemple de l'arbre illustré dans la figure 8.4. Les paramètres élémentaires sont regroupés dans le vecteur  $X^{(0)}$  de dimension 8. La variable  $X_1^{(0)}$  intervient cette fois-ci dans trois branches différentes (1, 4 et 7). Nous cherchons à caractériser l'influence de  $X_1^{(0)}$  à travers chacune de ces branches. La structure de l'arbre impose une décomposition de  $\partial \beta^{(TE/0)} / \partial X_1^{(0)}$  s'appuyant sur le niveau 3. Nous pouvons ainsi estimer l'influence globale de  $X_1^{(0)}$  au moyen de :

$$\frac{\partial \beta^{(TE/0)}}{\partial X_1^{(0)}} = \nabla_{\mathbf{x}^{(3)}}^T \beta^{(TE/3)} \mathbf{J}_{\mathbf{x}^{(3)}\mathbf{x}^{(2)}} \dots \mathbf{J}_{\mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(0)}} \big|_{\mathbf{x}^{(0)*}} \quad (8.77)$$

avec :

$$\nabla_{\mathbf{x}^{(3)}}^T \beta^{(TE/3)} = \left[ \frac{\partial \beta^{(TE/3)}}{\partial X_1^{(3)}} \quad \dots \quad \frac{\partial \beta^{(TE/3)}}{\partial X_{14}^{(3)}} \right] \quad (8.78)$$



Il vient :

$$+\frac{\partial\beta^{(TE/3)}}{\partial X_{14}^{(3)}}\frac{\partial X_{14}^{(3)}}{\partial X_1^{(2)}} \text{ (branche 7)} \quad (8.81)$$

### Exemple du respect de l'étanchéité aux gaz au niveau du joint de culasse

Pour illustrer l'intérêt de la construction de chaînes de mesures d'importance et l'interprétation que nous pouvons en faire, nous considérons le problème d'étanchéité aux gaz au niveau du joint de culasse que nous avons introduit dans le cadre du chapitre 3 et de la définition de notre exemple conducteur.

**Interprétation générale de la chaîne d'importance.** La figure 8.5 représente la chaîne de facteurs d'importance relative au critère de pression minimum devant être exercée sur le joint de culasse pour assurer l'étanchéité aux gaz. D'abord, le formalisme utilisé souligne bien la décomposition logique et physique des causes à l'origine du mode de défaillance (non respect du critère d'étanchéité). Nous distinguons ici deux branches principales : celle qui repose sur la pression de combustion maximum  $P_{max}$  et celle qui se développe à partir de la tension stabilisée du serrage de la culasse. Ensuite, il est nécessaire de préciser que nous avons traduit l'influence des différentes variables sur les variables des niveaux immédiatement supérieurs en terme d'une contribution en %. Cette dernière permet une identification claire et rapide des paramètres les plus contributeurs. Analysons et interprétons maintenant dans le détail cette chaîne de mesures d'importance.

**Interprétation détaillée de la chaîne d'importance.** Nous procédons à l'examen du *Top Event* pour, petit à petit, atteindre les variables de conception renseignées au niveau élémentaire.

La chaîne d'importance indique que la probabilité d'occurrence du mode de défaillance est beaucoup plus sensible (poids relatif neuf fois plus important) au scénario décrit par la branche inférieure ( $P_{max}$ ) qu'à celui représenté par la branche supérieure (tension de serrage stabilisée des vis de culasse). Même si elle n'apparaît pas explicitement sur la chaîne d'importance, nous rappelons, à ce stade, que les mesures de sensibilité brutes fournissent également une information sur le rôle des différentes variables. Elles permettent de distinguer les paramètres résistants (c'est bien entendu le cas de la tension de serrage ici) ou sollicitants (à l'image de  $P_{max}$ ) vis-à-vis du comportement du système.

Le cas de la pression de combustion  $P_{max}$  est intéressant puisque ce paramètre est impliqué dans les deux scénarios de défaillance. Examiné de manière isolée dans la branche inférieure de l'arbre d'importance, il pilote à l'ordre 1 la fiabilité du système vis-à-vis du critère d'étanchéité considéré. En revanche, nous remarquons que son poids sur la fiabilité à travers la branche supérieure n'est pas significatif. Notons que dans les deux cas la pression de combustion maximum  $P_{max}$  agit comme une sollicitation au regard de la fiabilité mesurée.

En rouge sont surlignées les séquences phénoménologiques les plus critiques vis-à-vis du mode de défaillance analysé. Si l'indicateur de fiabilité qui lui est associé n'est pas à l'objectif alors il est nécessaire de définir un plan d'actions visant à définir puis à valider de manière optimale des modifications de conception. La chaîne d'importance permet de hiérarchiser les leviers de conception les plus pertinents du point de vue de la fiabilité. Dans le cadre de notre exemple, la lecture de la chaîne montre que les séquences phénoménologiques qu'il est nécessaire de mieux maîtriser sont, dans l'ordre :

1.  $\{P_{max} \longrightarrow \text{Avance à l'injection}\}$  ;
2.  $\{P_{max} \longrightarrow \text{Remplissage en air de la chambre de combustion (masse d'O}_2 \text{ enfermée)} \longrightarrow \text{calage à l'échappement}\}$  ;
3.  $\{\text{Tension stabilisée de serrage de la culasse} \longrightarrow \text{Tension de serrage appliquée}\}$ .

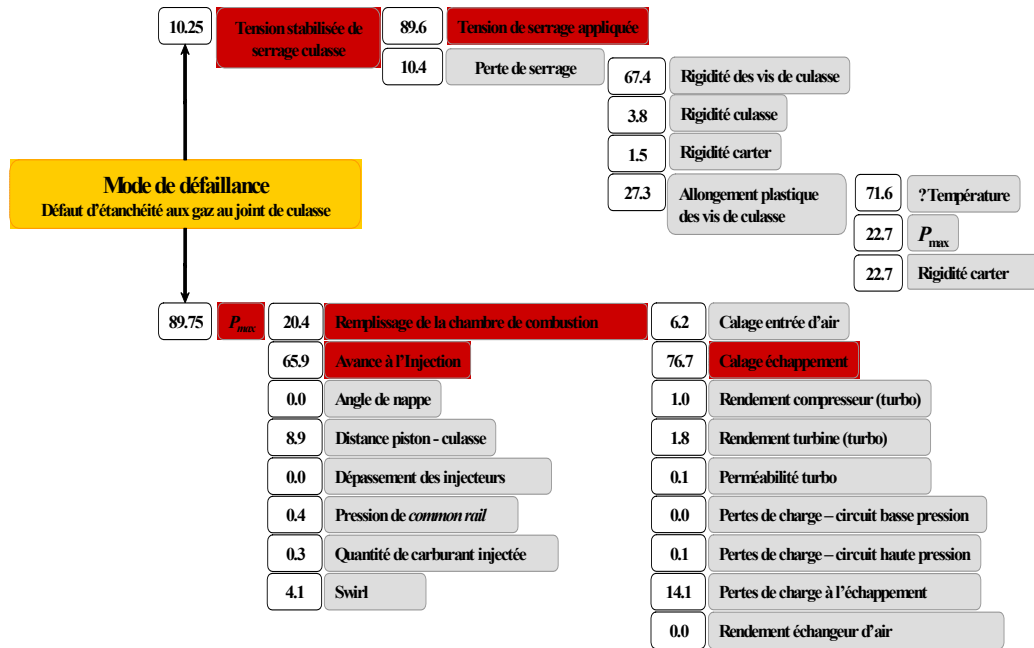


FIG. 8.5 – Extrait de la chaîne d'importance relative au défaut d'étanchéité aux gaz.

A des fins d'optimisation de la conception pour la fiabilité, si  $P_{max}$  ne peut pas être contrôlée de manière directe, la chaîne montre donc que l'avance à l'injection, puis le remplissage en air de la chambre de combustion sont les leviers à modifier de manière prioritaire. S'il n'est pas possible de le faire facilement et économiquement (les contraintes technico-économiques s'ajoutent à celle de la fiabilité), alors il faut d'abord voir si l'on peut redéfinir les préconisations de tension de serrage des vis de culasse ou mieux maîtriser les dispersions dues au process de serrage de celles-ci.

#### 8.4.4 Conclusion

Dans cette section, consacrée à la construction de chaînes de mesures d'importance mécaniques et fiabilistes, nous avons montré comment il est possible d'exploiter les multiples schémas de calcul introduits dans la figure 8.2 afin d'identifier :

- l'influence globale de n'importe quel paramètre physique, élémentaire ou intermédiaire, impliqué dans les divers scénarios de défaillance du système considéré ;
- l'influence partielle de n'importe quel paramètre à travers les multiples chemins de défaillance dans lesquels il est susceptible d'intervenir.

Finalement, nous déterminons les paramètres et les phénomènes physiques les plus influents sur la fiabilité du système ainsi que leurs combinaisons les plus critiques.

Les principaux obstacles à l'obtention de ces chaînes sont, d'une part, la nécessité de calculer les gradients et les matrices Jacobiennes intermédiaires en des points représentatifs du point de conception global et, d'autre part, la qualité des approximations des fonctions de densité de probabilités des variables des niveaux intermédiaires du modèle de calcul continu.

## 8.5 Validation du modèle de fiabilité et optimisation de la conception

### 8.5.1 L'analyse de fiabilité au service de la conception

L'intérêt majeur de l'approche par la modélisation *système et physique* du problème de fiabilité, que nous suggérons, se situe au niveau de son potentiel à estimer, à prévoir, à démontrer, à construire la fiabilité de systèmes mécaniques en cours de conception. Les nombreux produits du traitement mécano-probabiliste des scénarios de défaillance à contenu physique sont autant d'arguments exploitables en conception, pour l'aide à la décision et au dimensionnement fiable. Notre objectif consiste maintenant à illustrer leur capacité à guider, voire à piloter, les différentes itérations de conception préliminaire et détaillée de systèmes mécaniques complexes.

Une démarche d'optimisation de la conception basée sur l'utilisation des mesures classiques de sensibilité fiabiliste (Tab. 8.5) a récemment été proposée [RHFD04, TRF<sup>+</sup>06] afin :

- d'identifier les paramètres dominants dans la réalisation de la fiabilité,
- d'orienter en conséquence vers les modifications de conception les plus pertinentes vis-à-vis de la fiabilité.

Nous suggérons de tirer avantage d'une approche similaire, bénéficiant en outre, de l'ensemble de l'information supplémentaire issue du traitement des modèles de fiabilité physico-probabilistes systèmes que nous revendiquons. Autrement dit, il ne s'agit plus simplement d'exploiter les seules mesures de sensibilité de manière isolée (*i.e.* sans prendre en compte les interactions des multiples phénomènes impliqués dans les scénarios de défaillance) mais bien de mettre à profit la connaissance plus fine et plus complète issue de l'analyse :

- des corrélations entre les différents états limites et fonctions de performance,
- des probabilités conditionnelles de défaillance,
- des chaînes de facteurs d'importance,
- des degrés de représentativité de la modélisation des incertitudes et de la physique de défaillance.

Une telle approche vise à fournir des recommandations pour optimiser la fiabilité des systèmes mécaniques, en stimulant la synergie des multiples acteurs de leur conception. Plus précisément, elle permet de les renseigner, toujours du point de vue de la fiabilité :

- sur les paramètres de conception dont la modification de la valeur nominale est à effectuer de manière prioritaire ;
- sur les paramètres de conception dont une meilleure maîtrise des dispersions est indispensable ;
- sur les modèles probabilistes des données d'entrée influant sur l'estimation de la fiabilité prévisionnelle et dont le degré de représentativité n'est pas assez élevé (car construit à partir d'informations trop subjectives) ;
- sur les modèles de comportement physique qui impactent de manière significative l'estimation de la fiabilité prévisionnelle et dont le degré de représentativité n'est pas assez élevé.

Le choix des modifications de conception ne saurait être optimal sans la prise en compte de contraintes et d'objectifs, propres à l'activité de conception, autres que la fiabilité.



Nous sommes donc conscients qu'il s'agit avant tout d'un exercice collégial auquel sont tenus de participer l'ensemble des acteurs de la conception fiable. Il conduit à la détermination du meilleur compromis, c'est-à-dire de la conception satisfaisant au mieux l'ensemble des critères préalablement fixés par les décideurs. Toutefois, principalement pour simplifier notre démonstration et pour mieux souligner la valeur ajoutée de l'approche que nous proposons, nous abordons le problème de l'optimisation essentiellement vis-à-vis du point de vue de la fiabilité.

A ce stade, il est intéressant de développer l'explicitation de la procédure experte d'optimisation de la conception par la fiabilité sur la base de l'étude d'un exemple simple.

### 8.5.2 Exemple de l'axe de piston

#### Position du problème

En raisonnant à nouveau sur l'exemple du grippage de l'axe de piston (Chapitre 3 section 3.2), nous montrons brièvement comment les produits de l'approche proposée sont à même de piloter efficacement les phases préliminaire et détaillée d'un processus de conception de systèmes mécaniques complexes.

Nous rappelons que les trois critères de déformation de l'axe de piston entraînant potentiellement son grippage sont la flexion, l'ovalisation et le dépassement de la charge critique supportée par les bossages. Les fonctions de performance définies sur la base de ces critères de déformation dépendent toutes du même ensemble de paramètres de conception (Fig. 3.6) :

- $B_p$ , la largeur de la tête de bielle.
- $E_b$ , la distance entre les bossages de l'axe de piston.
- $E_{axe}$ , le module d'Young de l'axe de piston.
- $D_{ext}$  et  $D_{int}$ , respectivement les diamètres extérieur et intérieur de l'axe.
- $P_{max}$ , la pression de combustion maximum.
- $D_{cyl}$ , le diamètre de l'alésage des cylindres.
- $L$ , la longueur de l'axe de piston.

Toujours à des fins simplificatrices et pour aller à l'essentiel, nous considérons ici qu'une itération de conception consiste seulement à modifier la spécification d'un paramètre de conception et un seul. Dans le cadre d'applications industrielles réelles, il est évident que plusieurs paramètres sont ajustés ou modifiés au cours de la même itération de conception. En outre, les choix de modification visant à optimiser la conception résultent d'un arbitrage compatible avec de multiples contraintes telles que les coûts de développement, de fabrication ou encore de maintenance.

#### Illustration de la procédure experte de conception par la fiabilité préconisée

La figure 8.6 illustre l'évolution de la fiabilité de l'axe du piston en fonction de multiples mises à jour de sa définition technique. Celles-ci ont été recommandées, de manière consécutive, au cours de l'étape préliminaire de son processus de conception, par les résultats de l'analyse fiabiliste que nous proposons.

Le premier point correspond aux résultats obtenus à partir d'une première proposition de définition de l'axe, de la représentation initiale des incertitudes sur les

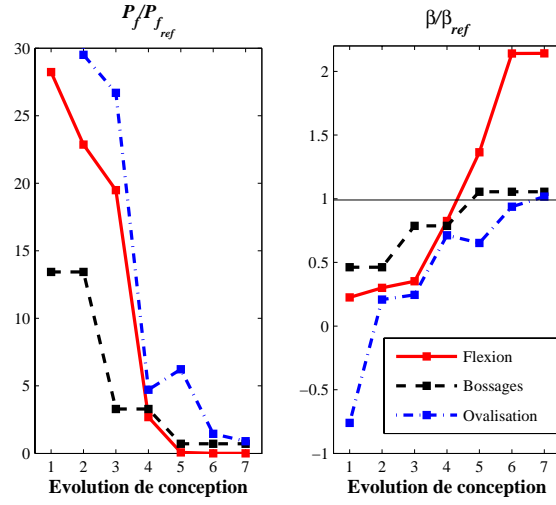


FIG. 8.6 – Evolution de la fiabilité de l'axe de piston.

différents paramètres de conception élémentaires et d'une modélisation préliminaire de la physique de défaillance. Par exemple, à cet instant de la conception :

- le module d'Young de l'axe du piston est modélisé à partir de l'*a priori* du concepteur (Fig. 6.10) dont le degré de représentativité égal à 1 est faible.
- les différents comportements physiques de l'axe de piston sont modélisés au moyen de relations analytiques simples.

Une chose est certaine : l'estimation prévisionnelle de la fiabilité est loin d'être acceptable (Tab. 8.8).

	Ovalisation	Flexion	Chargement critique des bossages
$P_f / P_{f_{ref}}$	89, 50	28, 23	13, 43
$\beta / \beta_{ref}$	0, 76	0, 22	0, 46

TAB. 8.8 – Fiabilité de l'axe de piston après la première itération de conception.

Le challenge consiste donc à identifier les leviers de dimensionnement et à réaliser les choix de modifications les plus pertinents afin d'assurer la convergence de la fiabilité de l'axe de piston vers la cible requise, en un minimum d'itérations de conception. Afin de guider efficacement le pilotage de l'optimisation de la conception par la fiabilité, nous adoptons une approche système et multi-modes de défaillance. Elle exploite, de manière conjointe, l'ensemble des produits de l'approche par la modélisation *système et physique* du problème de fiabilité proposée : les élasticités des mesures de fiabilité de chaque critère de performance, les chaînes de facteurs d'importance pour chaque mode de défaillance, leurs probabilités conditionnelles d'occurrence, *etc.*

Nous examinons d'abord les facteurs de sensibilité des indices de fiabilité relatifs à chaque critère. Par exemple, la figure 8.7 représente les élasticités aux moyennes et aux écarts-types des paramètres de conception de l'indice de fiabilité  $\beta_{flexion}^{(l)}$  (c'est-à-dire les facteurs d'importance normalisés et adimensionnels tirés du tableau 8.5). Elle

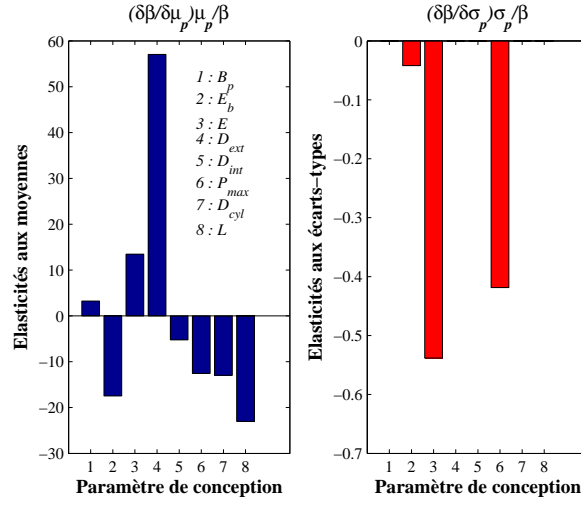


FIG. 8.7 – Elasticités de  $\beta_{flexion}^{(l)}$  après la première itération de conception.

indique clairement que la fiabilité vis-à-vis du critère de flexion est sensible à plusieurs paramètres et que nous disposons donc de multiples options pour l'optimisation de sa conception. En particulier, ces résultats informent le concepteur que l'augmentation de la moyenne de  $D_{ext}$  ou la diminution de celle de  $L$ ,  $E_b$ ,  $D_{cyl}$ ,  $P_{max}$ ,  $D_{int}$  ont un impact positif non négligeable sur la fiabilité de l'axe par rapport au critère de flexion. Ils préviennent aussi les concepteurs et les statisticiens que la vérification, la maîtrise et la limitation des dispersions de  $E_{axe}$ ,  $P_{max}$  et  $E_b$  ont également un effet positif sur la fiabilité de l'axe en flexion. Nous précisons que des informations identiques sont disponibles et sont exploitées de la même manière pour les deux autres critères de déformation de l'axe de piston.

Nous prenons également en compte les corrélations des états limites de performance, les mesures de probabilité conditionnelle de performance ou de non performance. Autrement dit, nous exploitons des résultats du type de ceux qui ont été répertoriés précédemment dans ce chapitre dans les tableaux 8.2, 8.3 et 8.4.

De l'arbitrage expert de l'ensemble de ces informations résulte la définition de la première modification de conception. Elle consiste à réduire la moyenne du diamètre intérieur de l'axe  $D_{int}$ . Nous faisons remarquer que nous avons décidé de ne pas modifier le diamètre extérieur  $D_{ext}$  de l'axe de piston bien qu'il apparaisse comme l'un des paramètres les plus contributeurs à la fiabilité de l'axe en flexion. Ce choix se justifie par le fait qu'une modification de sa valeur nominale nécessite la reconception de l'ensemble des pièces de l'attelage mobile (axe, piston, bielle, coussinets). Nous privilégions ainsi les évolutions les plus simples et les moins gourmandes en terme de ressources technico-économiques. Finalement, les nouvelles mesures de fiabilité relatives aux trois critères de déformation de l'axe sont rassemblées dans le tableau 8.9. La fiabilité prévisionnelle ne satisfait toujours pas à l'objectif.

	Ovalisation	Flexion	Chargement critique des bossages
$P_f / P_{f_{ref}}$	29,50	22,86	13,43
$\beta / \beta_{ref}$	0,21	0,30	0,46

TAB. 8.9 – Fiabilité de l’axe de piston après la deuxième itération de conception.

En analysant, après chaque itération de conception, les mêmes indicateurs que précédemment, nous sommes en mesure d’identifier les paramètres de conception et les caractéristiques du modèle global de fiabilité les plus critiques : ceux sur lesquels il faut faire porter l’effort de caractérisation et de validation de façon prioritaire. Autrement dit, nous exhibons, à chaque itération, les leviers disponibles les plus à même d’améliorer soit la conception, soit le modèle assurant l’estimation précise de son niveau de fiabilité prévisionnelle.

Suite à la deuxième itération de conception, les évolutions suivantes sont tour à tour recommandées par l’analyse de fiabilité puis mises en œuvre par les acteurs de la conception :

- La modification de conception n°3 se traduit par la diminution de l’écart-type de la pression de combustion maximum  $P_{max}$  par le biais d’une légère modification de la stratégie de remplissage en air de la chambre de combustion (Fig. 8.5).
- Les modifications n°4 et 5 concernent la valeur nominale et les dispersions du module d’Young  $E_{axe}$  de l’axe de piston. Etant données l’influence de la moyenne et de l’écart-type du module d’Young  $E_{axe}$  ainsi que la faible représentativité de sa modélisation stochastique, les experts matériaux sont consultés afin de mener une campagne d’essais de caractérisation. La moyenne et l’écart-type de  $E_{axe}$  préconisés sont modifiés, son modèle probabiliste est mis à jour par les statisticiens (son degré de représentativité est dès lors plus élevé).
- La modification n°6 correspond à une réduction de la longueur  $L$  de l’axe de piston.
- La modification n°7 se manifeste par une diminution de la longueur  $E_b$  séparant les bossages de l’axe de piston.

Après la septième itération de conception préliminaire suivant ce cheminement, la fiabilité du système étudié au regard des trois états limites satisfait à l’objectif (Tab. 8.10). Il apparaît même que la fiabilité prévisionnelle de la conception préliminaire de l’axe au regard du critère de flexion est fortement surabondante par rapport à l’objectif requis. Par conséquent, principalement si des critères d’ordre économique l’exigent, des modifications de conception additionnelles peuvent être décidées de manière à ne pas “payer” un excès de fiabilité non indispensable.

La procédure d’optimisation experte, illustrée à travers cet exemple simple de conception préliminaire, est généralisable à la phase de conception détaillée sans aucun problème. Toutefois, la prise en compte de la représentativité des modèles numériques

	Ovalisation	Flexion	Chargement critique des bossages
$P_f / P_{f_{ref}}$	0,90	0,00	0,71
$\beta / \beta_{ref}$	1,02	2,14	1,05

TAB. 8.10 – Fiabilité de l’axe de piston après la septième itération de conception.

$M_k^{(l)}$  formalisant les divers phénomènes physiques impliqués dans la défaillance des systèmes mécaniques est alors obligatoire. La caractérisation de l'impact de la modélisation sur l'estimation de la fiabilité est assurée par l'évaluation des sensibilités des probabilités de défaillance et des indices de fiabilité aux paramètres  $\theta_{M_k^{(l)}}$  des différents modèles  $M_k^{(l)}$  (Tab. 8.5) dans l'analyse de sensibilité des mesures de fiabilité. La mise à jour d'un modèle, dont nous avons identifié l'influence prépondérante sur la fiabilité et dont nous savons que sa représentativité n'est pas optimale, constitue alors une action de modification ou de validation de la conception au même titre que des changements opérés au niveau de la caractérisation des paramètres physiques de conception.

### 8.5.3 Conclusion

Cette étude simplifiée de la construction de la fiabilité de l'axe de piston a le mérite de révéler le grand potentiel de la démarche de conception par la fiabilité préconisée. Encourageant les interactions entre les différents acteurs d'un processus de conception industrielle, elle assure la construction et l'amélioration de la fiabilité des systèmes mécaniques aux différentes étapes de leur processus de conception. L'approche experte d'optimisation de la conception par la fiabilité que nous développons fournit ainsi des arguments solides pour l'aide au dimensionnement et à la validation de systèmes mécaniques en cours de conception. Une conséquence supplémentaire de son implémentation se situe au niveau de l'amélioration de la robustesse des systèmes mécaniques puisqu'elle participe à réduire la sensibilité de la réponse du système et de sa fiabilité à l'évolution des paramètres de conception et à leur dispersion.

## 8.6 Conclusion du chapitre

### 8.6.1 Synthèse

A l'issue de ce chapitre, nous disposons de tous les ingrédients nécessaires à la mise en œuvre complète de l'approche physico-probabiliste système pilote d'un processus de conception fiable de systèmes mécaniques, que nous revendiquons.

Les enjeux et les principes d'une évaluation des scénarios de défaillance phénoménologiques, par les outils classiques du couplage mécano-fiabiliste, ont d'abord été explicités. Plusieurs stratégies d'analyse ont alors été définies et le concept d'analyse *FORM/SORM* de type "court-circuit" a été introduit. D'une part, nous sommes en mesure d'évaluer les probabilités d'occurrence marginales des modes de défaillance (probabilités de défaillance) potentiellement générés par les scénarios examinés, leurs corrélations et leurs probabilités d'occurrence conditionnelles. D'autre part, nous construisons des chaînes de facteurs d'importance. Elles ont pour intérêt de caractériser l'influence de chaque variable du modèle sur la fiabilité du système mais aussi sur la manifestation des phénomènes physiques qu'elle induit : à n'importe quel niveau des scénarios de défaillance physico-probabilistes, à travers n'importe quelle branche dans laquelle elle intervient.

Enfin, à partir de l'étude d'un sous-système de moteur Diesel d'automobile, la capacité des produits de l'analyse globale à piloter et à guider l'activité de conception

a été soulignée. Nous avons effectivement montré comment ils assurent la définition d'arguments d'aide au dimensionnement fiable et la construction de plans adéquats de validations ou d'améliorations de la fiabilité.

### 8.6.2 Perspectives

Nous distinguons trois perspectives majeures concernant l'amélioration de la méthodologie de traitement des scénarios phénoménologiques, systèmes et probabilistes pour l'évaluation, l'optimisation et la validation du modèle de fiabilité global.

D'abord les techniques de couplage mécano-fiabiliste exploitées ou développées dans le cadre de ce chapitre demeurent essentiellement performantes dans un contexte statique. Nous sommes d'ores et déjà capables d'incorporer l'effet de processus de dégradation croissant et dépendant du temps (usure monotone, encrassement irréversible,...) au sein des modèles de fiabilité que nous proposons. Les techniques de calcul que nous exploitons permettent déjà de les traiter de manière efficace. En revanche, dans l'état actuel de la formalisation de la méthodologie, nous n'intégrons pas encore la prise en compte de phénomènes de dégradation ou d'endommagement plus complexes, se distinguant par exemple par leur caractère réversible et/ou périodique (*e.g.* phénomènes couplés d'encrassement et de décrassage). Une voie de progrès intéressante et fondamentale se situe donc au niveau de l'implémentation d'outils assurant l'analyse de problèmes dépendant de manière complexe du paramètre temps. Intuitivement, et malgré un effort supplémentaire de calcul considérable, la méthode *PHI2* [ARSL04] semble être la plus appropriée et la plus en mesure de fournir des résultats pertinents.

Ensuite, la procédure d'optimisation de la conception par la fiabilité doit être améliorée. L'exploitation des multiples produits de l'évaluation de tels modèles *systèmes et physiques* de la fiabilité, à des fins d'optimisation de la conception, est à ce jour réalisée au moyen d'une procédure experte. Autrement dit, elle n'est pas automatisée. Une voie de progrès consisterait donc à définir les bases du problème d'optimisation multi-critères sous-jacent et de poser les bases d'une procédure de résolution numérique adaptée.

Enfin, la méthodologie d'estimation, d'élaboration et d'amélioration requière la mise en œuvre de multiples calculs, l'échange de nombreuses données et le post-traitement de divers résultats. L'automatisation de la construction et de l'évaluation des modèles mécano-fiabilistes proposés est indispensable. L'implémentation d'un outil informatique support de cette approche multidisciplinaire est donc recommandée. A cet effet, en parallèle de la mise en place théorique de la démarche fiabiliste suggérée, nous avons développé *RELAB* : une plateforme *Matlab*<sup>®</sup> d'évaluation et d'élaboration de la fiabilité d'un système mécanique en cours de conception. Ses principales caractéristiques sont présentées dans le chapitre 9.

## Chapitre 9

### *RELAB* Software

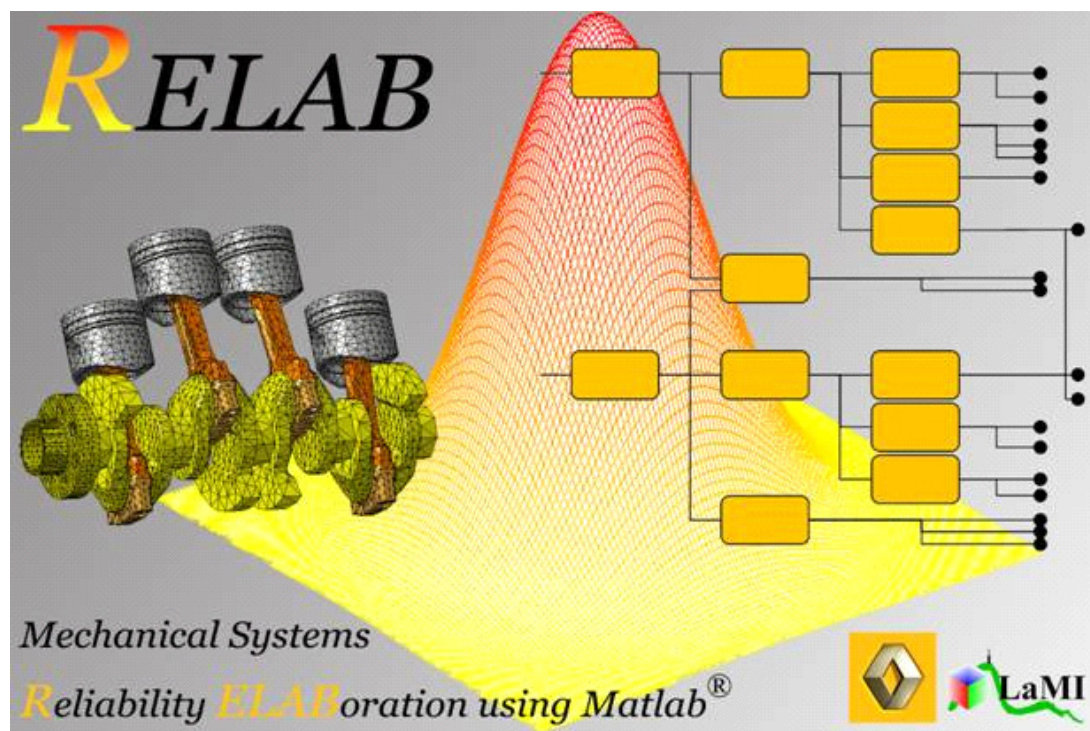


FIG. 9.1 – *RELAB : Mechanical Systems Reliability ELABoration using Matlab®*.

## 9.1 Introduction

L'approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité que nous développons nécessite, des concepteurs et des décideurs industriels, l'adoption d'une culture non déterministe du dimensionnement et donc un nouvel effort de conceptualisation. En outre, elle exige la manipulation de nombreuses données, la maîtrise de méthodes de calcul spécifiques et le post-traitement de l'ensemble de leurs produits.

Le développement d'une plateforme logicielle, support de l'approche par la modélisation *système et physique* du problème de fiabilité suggérée, s'est donc naturellement imposé<sup>1</sup>. Celle-ci baptisée *RELAB* (pour *RE*liability *LAB*oratory et *RE*liability *ELA*-Boration using *Matlab*<sup>®</sup> - Fig. 9.1 et 9.2) a été implémentée dans l'environnement *Matlab*<sup>®</sup> dans le souci permanent de répondre aux deux objectifs essentiels suivants :

- automatiser la réalisation et le traitement de modèles de fiabilité de type *système et physique* qui deviennent vite fastidieux à mettre en œuvre “à la main”.
- assurer la “vulgarisation” de l'analyse de fiabilité proposée afin de convaincre les acteurs de la conception industrielle ainsi que les décideurs de son potentiel.

L'objectif de ce chapitre synthétique est d'explicitier l'organisation générale de *RELAB* et de souligner ses multiples fonctionnalités déjà opérationnelles.

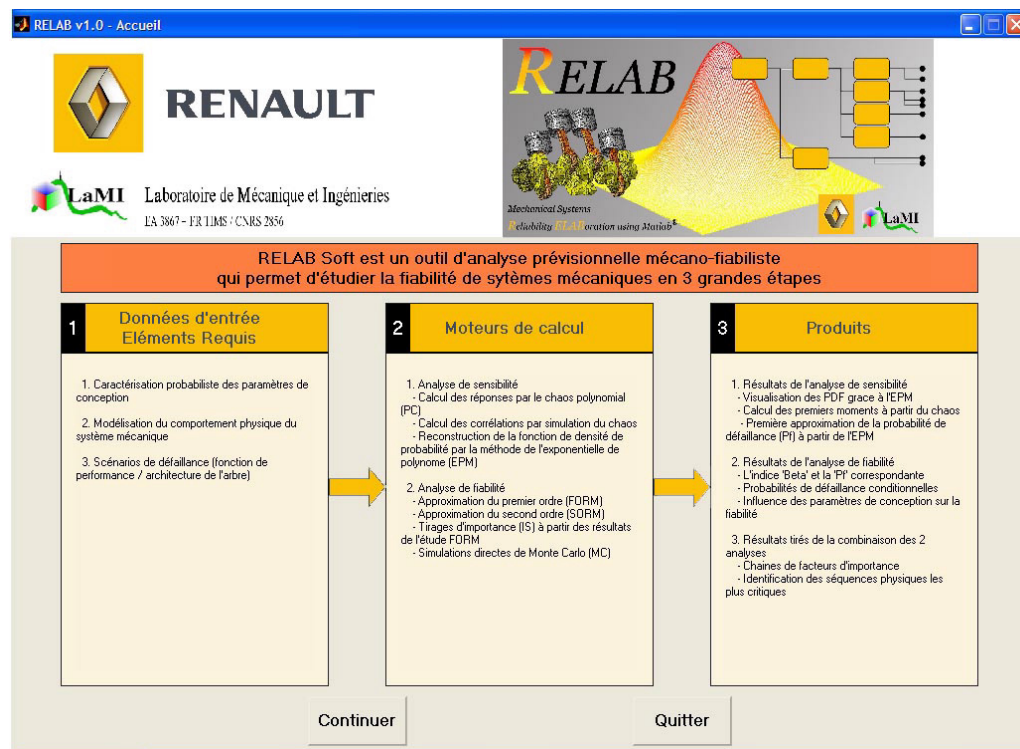


FIG. 9.2 – Fenêtre d'accueil de la plateforme *RELAB*.

<sup>1</sup> Notamment, il a été initié dans le cadre du travail de fin d'études de Maxime Robbe, élève ingénieur IFMA.



## 9.2 Principe général de fonctionnement

### 9.2.1 Organisation et structure

La plateforme *RELAB* repose sur une structure de type “Projet - Boîte à outils - Base de données” très efficace et intuitive.

#### Projet

Un projet est défini par la donnée :

- de la structure de scénarios de défaillance phénoménologiques,
- des modèles stochastiques des paramètres de conception,
- des modèles de comportement ou des phénomènes physiques identifiés en chaque nœud des scénarios,
- des objectifs et des analyses qu’il est nécessaire de réaliser pour les satisfaire.

#### Boîtes à outils

Les boîtes à outils correspondent aux éléments indispensables :

- à la définition, par l'utilisateur, de l'ensemble des composants d'un projet au moyen d'une interface graphique simple et performante,
- à la réalisation des différentes analyses et à l'échange automatisé de leurs résultats intermédiaires,
- à la visualisation, à l'exploitation et au stockage de tous les produits de l'étude globale de fiabilité.

Les principales boîtes à outils déjà fonctionnelles sont introduites dans les sections suivantes.

#### Bases de données

Les bases de données représentent la mémoire de *RELAB*. En effet, elles répertorient de manière exhaustive l'ensemble :

- des projets et des spécificités qui les caractérisent,
- des variables aléatoires modélisant les incertitudes sur les paramètres élémentaires de conception,
- des variables aléatoires intermédiaires déterminées au cours de l'étude des différents projets qui ont pu être examinés,
- des modèles de comportements physiques qui ont pu être créés au cours de ces mêmes projets,
- des produits des analyses de fiabilité et des analyses de sensibilité.

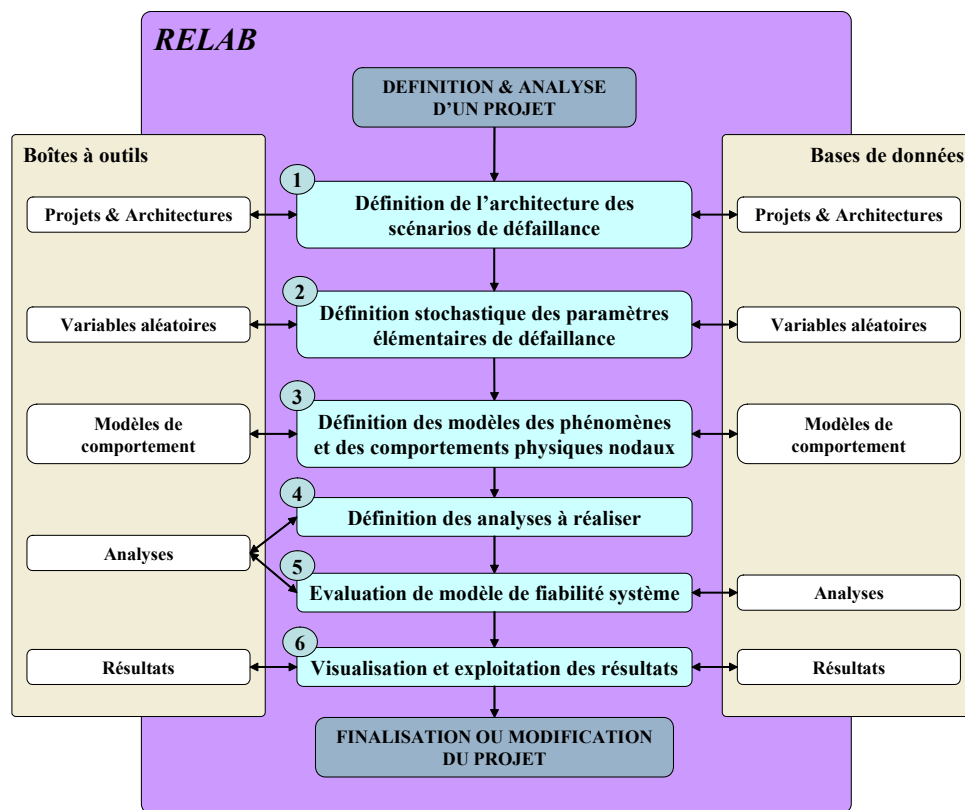
En conséquence, l'ensemble de ces informations peut être réexploité ultérieurement dans le cadre de nouveaux projets ou de reprises et d'améliorations d'études déjà réalisées.

### 9.2.2 Organigramme synoptique de fonctionnement

La figure 9.3 illustre de manière simplifiée l'organigramme de fonctionnement global de la plateforme informatique *RELAB*. Elle montre également comment ses différents constituants communiquent avec l'utilisateur au moment de la création et du traitement d'un projet. L'analyse d'un projet sous *RELAB*, de sa définition à sa finalisation, se déroule en six grandes phases :

1. La première étape assure la saisie de la structure des scénarios de défaillance qui a préalablement été définie par les ingénieurs fiabilistes, en accord avec les mécaniciens et les spécialistes de la physique (Chapitre 5). Elle bénéficie du support d'une boîte à outils d'aide à la création de l'architecture ainsi que d'une base de données listant l'ensemble des architectures déjà existantes ou étudiées.
2. La deuxième étape a pour finalité le renseignement des variables aléatoires modélisant la variabilité et les incertitudes relatives aux paramètres élémentaires de conception, ainsi que leur matrice de corrélation. Il s'agit donc simplement d'incorporer les conclusions des statisticiens quant à la caractérisation des paramètres de conception incertains (Chapitre 6) dans le modèle de fiabilité global. Elle repose sur une interface graphique dédiée et une base de données spécifique répertoriant l'ensemble des variables aléatoires déterminées dans le cadre d'études antérieures.
3. La troisième étape consiste à définir les modèles mathématiques des phénomènes et des comportements physiques impliqués en chaque nœud des scénarios de défaillance saisis au cours de la première étape. Il s'agit donc d'intégrer les représentations retenues par les spécialistes de la physique (Chapitre 6). Pour cela, nous disposons également d'une boîte à outils performante facilitant leur création et d'une base de données de modèles numériques nécessairement mise à jour après la finalisation de tout nouveau projet.
4. La quatrième étape permet à l'utilisateur de définir simplement les analyses de sensibilité (Chapitre 7) et de fiabilité (Chapitre 8) qu'il souhaite effectuer de manière prioritaire. Un boîte à outils intuitive le guide pas à pas pour définir les multiples options disponibles ainsi que les divers paramètres des algorithmes de calcul.
5. La cinquième étape est consacrée à la réalisation de l'ensemble des calculs requis par la mise en œuvre des différentes analyses retenues.
6. La sixième et dernière étape avant la finalisation ou la modification du projet consiste en la visualisation, l'exploitation et la sauvegarde de l'ensemble des résultats. Encore une fois, l'utilisateur est guidé par le biais d'une interface graphique simple mais appropriée. Les produits des analyses sont stockés de manière automatique. Ils sont accessibles aisément une fois l'étude terminée.

La grande force de *RELAB* se situe au niveau de l'échange permanent qu'il favorise entre l'utilisateur, les multiples boîtes à outils et les bases de données. Si les boîtes à outils sont vouées à évoluer au gré du développement de nouvelles techniques de modélisation ou méthodes de calcul, les bases de données sont, quant à elles, sans arrêt mises à jour.

FIG. 9.3 – Organigramme schématique de fonctionnement de *RELAB*.

### 9.3 Définition de la structure des scénarios de défaillance

La boîte à outils et la base de données dédiées à la définition de l'architecture des scénarios de défaillance donnent la possibilité à l'utilisateur de :

- charger un projet complet ou une architecture sauvegardés lors d'une étude précédente (Fig. 9.4 et 9.5).
- créer une nouvelle architecture (Fig. 9.6) en définissant son nom, le nombre de niveaux  $l$  puis le nombre d'étages  $k$  par niveau (Fig. 9.7), c'est-à-dire le nombre de phénomènes physiques et donc le nombre de paramètres résultants à chaque niveau  $l$ .

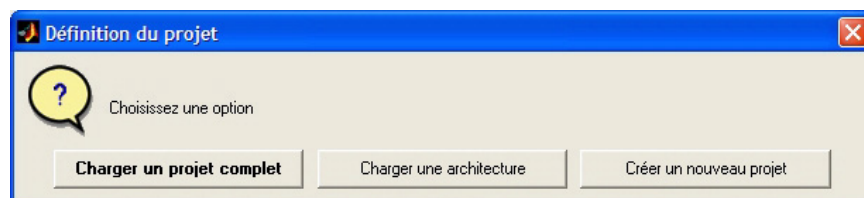


FIG. 9.4 – Initialisation d'un projet.

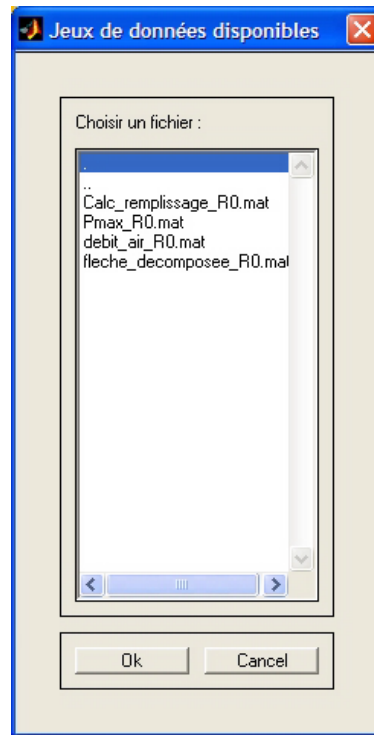


FIG. 9.5 – Liste des projets disponibles dans la base de données.

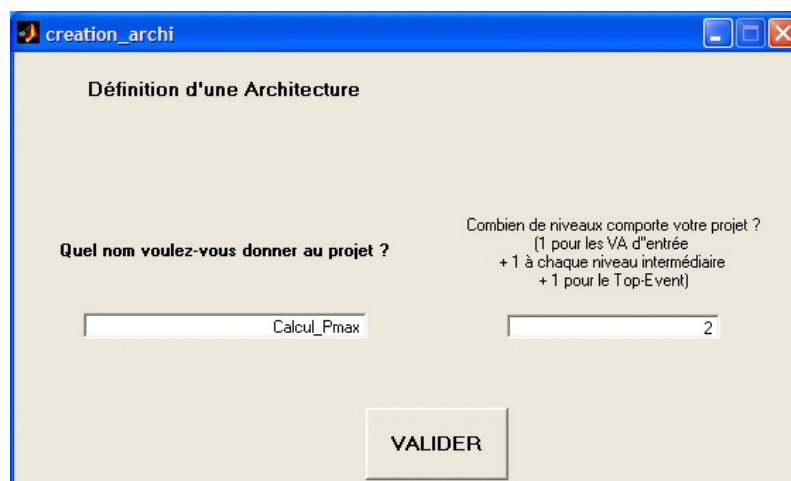
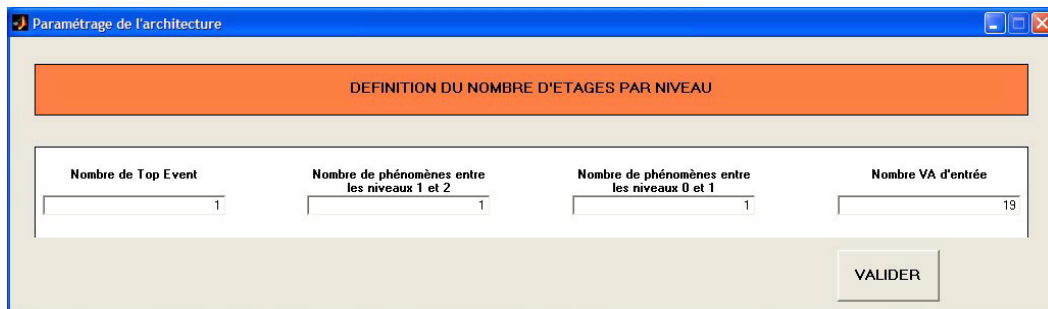


FIG. 9.6 – Création d'une nouvelle architecture.

FIG. 9.7 – Définition du nombre de variables à chaque niveau  $l$ .

## 9.4 Définition stochastique des paramètres de conception

La boîte à outils et la base de données dédiées à la définition stochastique des paramètres de conception donnent la possibilité à l'utilisateur de :

- charger un fichier existant et déjà assemblé de variables aléatoires (Fig. 9.8).
- créer un nouveau fichier de variables aléatoires (Fig. 9.8) à partir de variables existantes. On récupère et on assemble des variables prédéfinies en les sélectionnant simplement dans la base de données puis en définissant leurs étages  $k$  et leurs noms. On renseigne ensuite leur matrice de corrélation (Fig. 9.9).
- de définir de nouvelles variables. Pour cela *RELAB* dispose d'une bibliothèque conséquente de lois usuelles (normale, log-normale, uniforme, Weibull, Rayleigh, bêta, gamma, *etc...*) et d'une aide interactive pour leur définition et leur visualisation (Fig. 9.10). Dans ce cas, elles sont déterminées une par une, en fonction de leur étage  $k$ , de leur nom et de leur loi de probabilité.

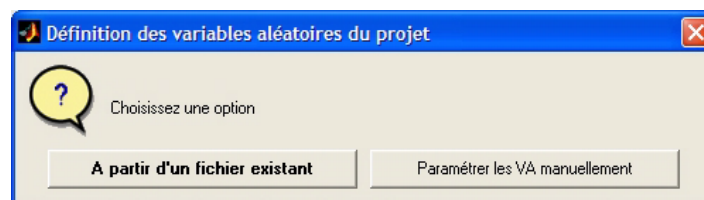


FIG. 9.8 – Initialisation de la définition des variables aléatoires élémentaires.

Création de la Matrice de corrélation

DEFINITION DE LA MATRICE DE CORRELATION

R_1/1	R_1/2	R_1/3	R_1/4	R_1/5	R_1/6	R_1/7	R_1/8	R_1/9
1	0	0	0	0	0	0	0	0
	R_2/2	R_2/3	R_2/4	R_2/5	R_2/6	R_2/7	R_2/8	R_2/9
	1	0	0	0	0	0	0	0
		R_3/3	R_3/4	R_3/5	R_3/6	R_3/7	R_3/8	R_3/9
		1	0	0	0	0	0	0
			R_4/4	R_4/5	R_4/6	R_4/7	R_4/8	R_4/9
			1	0	0	0	0	0
				R_5/5	R_5/6	R_5/7	R_5/8	R_5/9
				1	0	0	0	0
					R_6/6	R_6/7	R_6/8	R_6/9
					1	0	0	0
						R_7/7	R_7/8	R_7/9
						1	0	0
							R_8/8	R_8/9
							1	0
								R_9/9
								1

1 - AVI  
2 - AN  
3 - Dpc  
4 - NTP  
5 - Pra  
6 - Qini  
7 - Rem  
8 - Swirl  
9 - Ecart\_Pmax

VALIDER

FIG. 9.9 – Définition de la matrice de corrélation des variables aléatoires d'entrée.

Choix\_YA\_Entrées

Type de la Variable Aléatoire : Log-Normale Nom de la Variable Aléatoire : Qini Etage [-position] : 6

Mode de définition : A partir de la moyenne et l'écart-type

Moyenne : 81 Sigma : 0.7

P1 : 0 P2 : 0 P3 : 0 P4 : 0

Informations

VALIDER

PDF

CDF

Test / Validation

FIG. 9.10 – Fenêtre graphique de visualisation des variables aléatoires.

## 9.5 Définition des phénomènes physiques nodaux

La boîte à outils et la base de données dédiées à la définition des phénomènes et des comportements physiques nodaux assurent l'utilisateur de :

1. définir les variables en entrée de chaque phénomène. Pour chaque étage  $k$  de chaque niveau  $l$ , *RELAB* génère une fenêtre dans laquelle il peut renseigner le nom du phénomène ou du comportement, sélectionner les variables aléatoires d'entrée et indiquer la variable aléatoire de sortie générée (Fig. 9.11).
2. saisir les modèles mécaniques (ou physiques) nodaux. Trois options sont envisageables : soit on définit une expression analytique simple de manière directe, soit on crée un modèle plus élaboré à partir d'un fichier de calcul *Matlab*<sup>®</sup>, soit on construit un fichier *Matlab*<sup>®</sup> assurant la communication entre *RELAB* et un code de calcul complexe (de type éléments finis par exemple).
3. vérifier et de valider le modèle global par un test rapide garant du bon déroulement des calculs ultérieurs.

Au cours de ces étapes, de nombreuses fenêtres d'aide sont générées par *RELAB* pour faciliter la saisie.

Choix des VA en entrée de phénomène

Définition des VA en entrée du phénomène se situant au niveau 2 et à l'étage 1?

Nom du phénomène? (pas d'espace ni de signe '+', '-' ou '/') :

Nom de la VA de sortie? (pas d'espace ni de signe '+', '-' ou '/') :

Niveaux :			Etages :
2	1	0	
<input checked="" type="checkbox"/> Rem	<input type="checkbox"/> Qair	<input checked="" type="checkbox"/> Ecart_Pmax	1
		<input checked="" type="checkbox"/> AVI	2
		<input checked="" type="checkbox"/> AN	3
		<input checked="" type="checkbox"/> Dpc	4
		<input checked="" type="checkbox"/> NTP	5
		<input checked="" type="checkbox"/> Pra	6
		<input checked="" type="checkbox"/> Swirl	7
		<input type="checkbox"/> Tx_GBR	8
		<input type="checkbox"/> Ca_ADM	9
		<input type="checkbox"/> Ca_ECH	10
		<input type="checkbox"/> Rho_comp	11
		<input type="checkbox"/> Rho_turbo	12
		<input type="checkbox"/> Perm_turbo	13
		<input type="checkbox"/> PdC_BP	14
		<input type="checkbox"/> PdC_HP	15
		<input type="checkbox"/> PdC_ECH	16
		<input type="checkbox"/> RAS	17
		<input type="checkbox"/> Ecart_modele_de	18
		<input checked="" type="checkbox"/> Qirj	19

VALIDER

FIG. 9.11 – Définition des paramètres d'entrée et de sortie d'un modèle mécanique.

## 9.6 Définition des analyses mécano-fiabilistes

La boîte à outils consacrée à la définition et à l'implémentation de l'étude physique et probabiliste des scénarios de défaillance, définie au cours des étapes précédentes, guide l'utilisateur pour la mise en œuvre automatisée d'analyses de sensibilité et de fiabilité. Elle a été optimisée pour exploiter au mieux les possibilités du calcul vectoriel offerte par le logiciel *Matlab*<sup>®</sup>.

### Analyses de sensibilité

En ce qui concerne ce type d'études, les fonctionnalités de *RELAB* assurent d'ores et déjà la réalisation d'analyses relevant des méthodes de :

- simulation de Monte Carlo directe (Annexe E),
- chaos polynomial (Chapitre 7 & Annexe D),
- exponentielle d'un polynôme - *EPM* (Chapitre 7).

Nous rappelons qu'une analyse de sensibilité sur un scénario de défaillance complet permet de visualiser les distributions des variables aléatoires en chacun de leurs nœuds. Elle détermine également les coefficients de corrélation de l'ensemble des variables aléatoires physiques impliquées dans les scénarios de défaillance. Cette étape est primordiale et nécessite la manipulation d'un grand nombre de calculs et de données. Le principal intérêt de *RELAB* est de rendre cette phase totalement transparente pour l'utilisateur qui n'a plus qu'à renseigner les différentes options de calcul puis à dépouiller les résultats finaux.

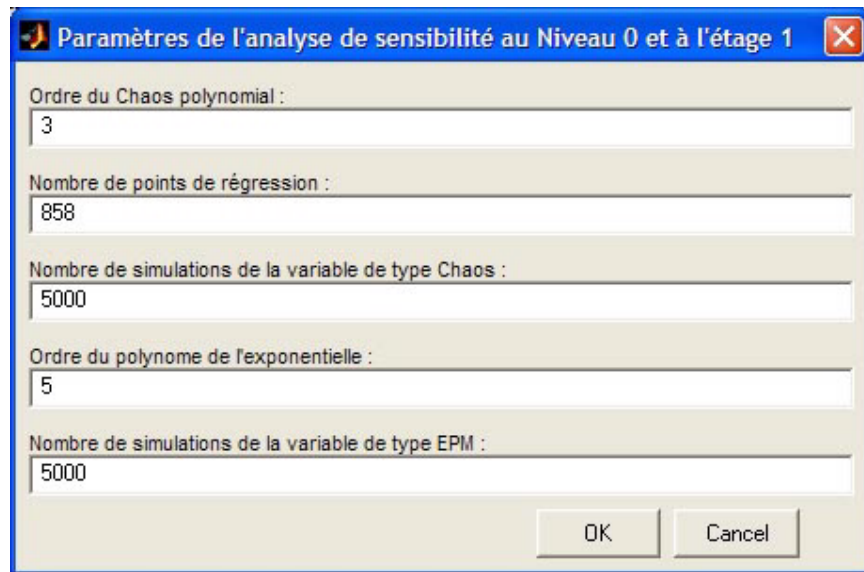
La figure 9.12 représente la fenêtre de définition des options de calcul proposée par *RELAB* pour le traitement de chaque nœud des scénarios de défaillance :

- La première partie de la fenêtre est destinée aux renseignements des options de calcul du développement sur la base d'un chaos polynomial de la variable examinée. Il s'agit d'abord de donner son ordre, puis de préciser le nombre de points de régression que l'on souhaite utiliser pour l'estimation de ses coefficients. Dans la version actuelle de *RELAB*, nous ajoutons que ces points de régression sont définis au moyen du plan d'expériences explicité dans le chapitre 7, éventuellement complété par la donnée de points choisis de manière purement aléatoire.
- La seconde partie est dédiée à la définition des paramètres indispensables à l'identification et à la validation de l'*EPM* correspondante. Il s'agit donc de préciser le nombre de simulations de la variable chaos polynomial nécessaire au calcul des moments, l'ordre du polynôme de l'exponentielle, le nombre de simulations de l'*EPM* à des fins d'approbation de l'approximation réalisée.

Avant l'analyse de chaque nœud, une fenêtre *RELAB* permet de vérifier si l'utilisateur souhaite bien effectuer des simulations de Monte Carlo (Fig. 9.13). Celle-ci sert également à définir le nombre de simulations des variables approximées par un développement chaos polynomial à réaliser pour le calcul des corrélations.

Une fois toutes les options de calcul paramétrées, *RELAB* procède à l'évaluation du modèle. Des barres d'attente renseignant sur la progression et l'avancement des différents calculs sont affichées. Les actions menées à terme et le temps mis pour les effectuer apparaissent quant à eux, au fur et à mesure, dans l'espace de travail *Matlab*<sup>®</sup>.





Paramètres de l'analyse de sensibilité au Niveau 0 et à l'étage 1

Ordre du Chaos polynomial : 3

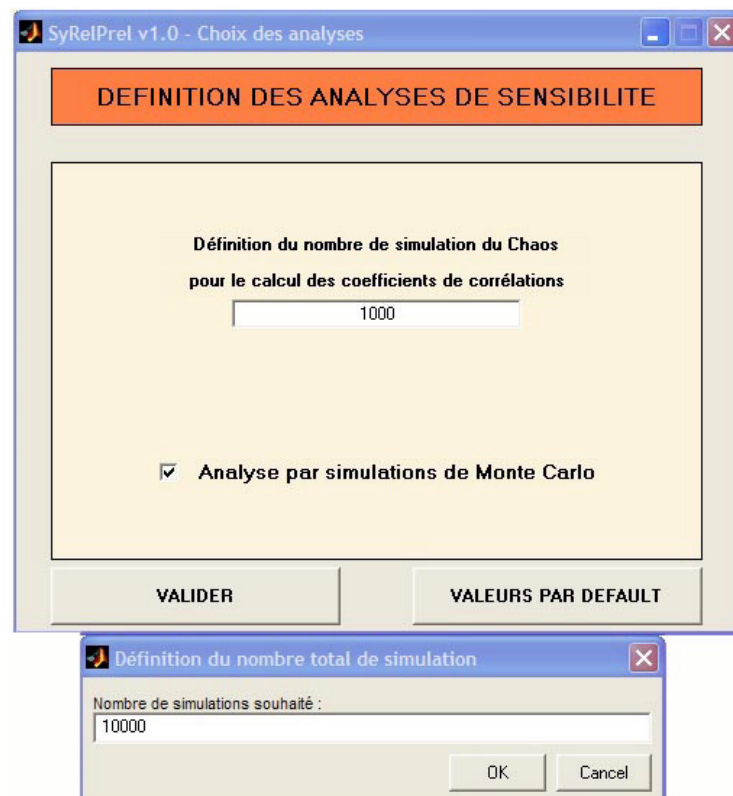
Nombre de points de régression : 858

Nombre de simulations de la variable de type Chaos : 5000

Ordre du polynome de l'exponentielle : 5

Nombre de simulations de la variable de type EPM : 5000

OK Cancel

FIG. 9.12 – Options du calcul de sensibilité par chaos polynomial et *EPM*.

SyRelPrel v1.0 - Choix des analyses

**DEFINITION DES ANALYSES DE SENSIBILITE**

Définition du nombre de simulation du Chaos  
pour le calcul des coefficients de corrélations

1000

☒ Analyse par simulations de Monte Carlo

VALIDER VALEURS PAR DEFAULT

Définition du nombre total de simulation

Nombre de simulations souhaité : 10000

OK Cancel

FIG. 9.13 – Options propres aux simulations de Monte Carlo et à l'évaluation des coefficients de corrélation.

### Analyses de fiabilité

En ce qui concerne ce type d'études, les fonctionnalités de *RELAB* assurent d'ores et déjà la réalisation d'analyses relevant des méthodes :

- de simulation de Monte Carlo directe.
- *FORM*. Nous exploitons ici l'algorithme *iHLRF* (Annexe D). Il assure l'évaluation des probabilités de défaillance et des indices de fiabilité à chaque niveau des scénarios de défaillance ainsi que les facteurs d'importance associés (Chapitre 8).
- *SORM*. *RELAB* offre la possibilité d'utiliser soit une méthode reposant sur le calcul du Hessien (matrice des dérivées secondes) des fonctions de performance, soit une méthode généralement plus économique en temps de calcul ne nécessitant que la sélection (automatisée) d'un nombre fini de points de la surface d'état limite<sup>2</sup> (Annexe D). L'ensemble des formules, corrigeant l'approximation *FORM* des diverses probabilités de défaillance examinées et rappelées dans le cadre de l'annexe D, est implémenté dans *RELAB*.

De la même manière que pour les analyses de sensibilité, un certain nombre de fenêtres de dialogue permettent à l'utilisateur de saisir les multiples options des calculs de fiabilité par une simulation de Monte Carlo ou par le biais d'approches *FORM/SORM*. Une fois l'ensemble des options de calcul paramétrées, *RELAB* procède à l'évaluation complète du modèle fiable *physique et système*. Des barres d'attente renseignant sur la progression et l'avancement des différents calculs sont affichées ; les actions menées à terme ainsi que le temps mis pour les effectuer apparaissent quant à eux, au fur et à mesure, dans l'espace de travail *Matlab*<sup>®</sup>.

## 9.7 Visualisation, exploitation et stockage des résultats

La dernière boîte à outils opérationnelle de *RELAB* donne la possibilité à l'utilisateur de :

- visualiser les résultats des analyses de sensibilité et de fiabilité. Pour cela, une fenêtre graphique spécifique apparaît à la fin de l'analyse de sensibilité en chaque nœud. Sur cette fenêtre (Fig. 9.14), on peut voir le tracé des fonctions de densité de probabilité obtenues par les différentes méthodes employées (Simulation directe de Monte Carlo, Chaos polynomial, *EPM*). On peut aussi voir une comparaison des propriétés statistiques de la variable aléatoire correspondante calculées par ces différentes méthodes.
- stocker automatiquement les différents produits des analyses ainsi que la plupart des calculs intermédiaires dans une base de données appropriée. *RELAB*, génère ainsi des fichiers de résultats contenant toutes les informations potentiellement utiles à divers besoins de post-traitement. Cette phase de post-traitement automatisée reste, quant à elle, à développer.
- réexploiter le moment venu l'ensemble de l'information agrégé dans cette base de données. Les stratégies de réexploitation doivent, elles aussi, être précisées.

<sup>2</sup>En fait, il s'agit de la méthode d'ajustement de la surface d'état limite par deux semi-paraboloïdes proposées par Der Kurieghian *et al.* [DKLH87].

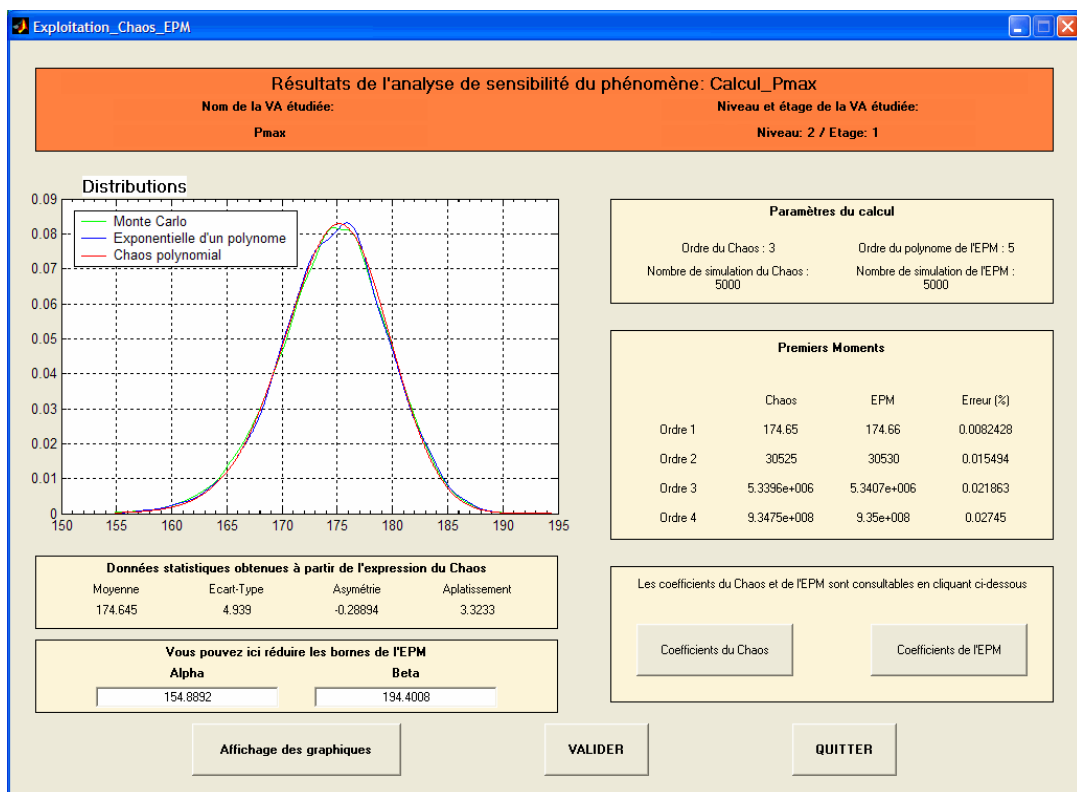


FIG. 9.14 – Fenêtre de visualisation et de validation pour sauvegarde des résultats.

## 9.8 Conclusion du chapitre

### 9.8.1 Synthèse

La plateforme logicielle *RELAB* (*REliability LABoratory* et *REliability ELABoration using Matlab*<sup>®</sup>) constitue le support informatique indispensable à la mise en œuvre de l'approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité que nous revendiquons. La démonstration de ses fonctionnalités déjà opérationnelles et de l'ensemble de son potentiel encore non exploité a suscité le grand intérêt des équipes de conception de la Direction de l'Ingénierie Mécanique Renault. Son industrialisation est en cours de réflexion tout comme la définition d'un plan d'actions visant à :

- définir la démarche à adopter pour poursuivre sa valorisation et d'assurer sa pérennité ;
- étendre ses capacités pour encore mieux prendre en compte le besoin des métiers de la simulation numérique et de la fiabilité.

*RELAB* a donc pour vocation d'évoluer et d'intégrer d'autres boîtes à outils. De multiples améliorations sont envisageables.

### 9.8.2 Voies de progrès... en cours d'implémentation

Un certain nombre de boîtes à outils complémentaires sont déjà en cours de réalisation.

**Boîte à outils “modification”.** Celle-ci a simplement pour objectif de faciliter les opérations consistant à modifier certains aspects des projets d'étude définis dans *RELAB*.

**Boîte à outils “analyse de données”.** Celle-ci a pour but d'automatiser la procédure de modélisation stochastique des paramètres élémentaires de défaillance introduite dans le cadre du chapitre 6. Il s'agit donc d'implémenter dans *RELAB* les outils nécessaires à la mise en œuvre des méthodes spécifiques aux :

- approches de type maximum de vraisemblance et maximum d'entropie,
- tests d'adéquation de lois de probabilité (*e.g.* Kolmogorov-Smirnov),
- démarches de mise à jour Bayésienne des modèles stochastiques subjectifs.

**Boîte à outils “post-traitement”.** La raison d'être de cette boîte à outils est bien sûr d'automatiser l'évaluation de l'ensemble des mesures de fiabilité présentées dans le cadre du chapitre 8. En particulier, elle doit assurer l'estimation de n'importe quelle probabilité conditionnelle au sein des scénarios de défaillance étudiés ainsi que la construction aisée et rapide des chaînes de facteurs d'importance quels que soient les scénarios de défaillance examinés.

**Boîte à outils “visualisation, exploitation et stockage des résultats”.** Celle-ci consiste avant tout à rendre encore plus performante, conviviale et intuitive la boîte à outils déjà existante pour la visualisation, le stockage et la réexploitation des résultats des analyses effectuées sous *RELAB*.

### 9.8.3 Voies de progrès... en cours de réflexion

Un certain nombre d'autres voies de progrès n'en sont encore qu'au stade de la réflexion. Nous n'en mentionnons ici que les deux principales.

**Boîte à outils “couplages automatisés avec des codes de calcul”.** Celle-ci aurait pour intérêt de venir compléter la boîte à outils assurant la définition des phénomènes physiques identifiés en chaque nœud des scénarios de défaillance. En particulier, elle aurait pour but de participer à :

- simplifier la définition dans *RELAB* de modèles de comportement physique requérant l'appel à des codes de calcul plus complexes (*e.g.* éléments finis).
- assurer la communication entre les outils d'analyse fiabiliste disponibles dans *RELAB* et ces codes de calcul.

Autrement dit, il s'agit, par le biais de cette nouvelle boîte à outils, d'optimiser les outils du couplage mécano-fiabiliste sous *RELAB*.

**Boîte à outils “communication calculs/essais”.** Dans le contexte spécifique des analyses de fiabilité physiques et systèmes que nous suggérons, il serait également intéressant de disposer d'une boîte à outils permettant une meilleure communication entre les métiers du calcul et ceux des essais.

D'une part, elle pourrait participer à améliorer le traitement expert des nœuds des scénarios de défaillance pour lesquels seule la réalisation d'essais physiques est en mesure d'apporter l'information requise. Par exemple, on pourrait imaginer générer un plan d'expériences approprié aux techniques utilisées dans *RELAB* (*e.g.* chaos polynomial, *EPM*, *FORM*). Les résultats des essais correspondant aux configurations des données d'entrée du nœud spécifiées par le plan d'expériences seraient ensuite analysés et post-traités sous *RELAB*. L'identification de la réponse du nœud sous la forme d'un développement chaos polynomial et d'une *EPM* ou bien la détermination de la probabilité de défaillance *FORM* serait ensuite directement accessible.

D'autre part, les résultats d'essais, quels qu'ils soient, sont en mesure de compléter et d'affiner la dimension prédictive des modèles numériques des phénomènes physiques que nous définissons en chaque nœud des scénarios de défaillance phénoménologiques. Par conséquent, il est nécessaire de développer les outils indispensables à la capitalisation de ces données d'essais et à leur réexploitation à des fins de modélisation.

Nous avons ici donné seulement deux exemples de possibilités que nous souhaiterions intégrer dans *RELAB* au sujet de l'optimisation des échanges entre les activités relatives au calcul mécano-fiabiliste et celles propres au domaine des essais. D'autres sont bien entendu envisageables.

## Chapitre 10

# Conclusion générale

### 10.1 Synthèse

Le thème de ce travail de recherche s’inscrit dans une perspective de conception fiable de systèmes mécaniques industriels. Il a été impulsé par la Direction de la Conception et des Technologies de l’Ingénierie Mécanique de la société RENAULT S.A.S et son Département Fiabilité et Mise Au Point Mécanique, soutenus par le Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI) de l’Université Blaise Pascal (UBP) et de l’Institut Français de Mécanique Avancée (IFMA) de Clermont-Ferrand.

L’industrie mécanique, en particulier sa composante automobile, est confrontée au problème déterminant de la conception de systèmes innovants, aux exigences de fiabilité toujours plus ambitieuses et cruciales. L’évaluation et l’élaboration de la fiabilité au cours de leur processus de conception constituent donc des enjeux majeurs. Les challenges qu’ils suscitent, nécessitent la mise en œuvre de démarches pluridisciplinaires. Elles visent à assurer, dès les premières phases et jusqu’à la fin du développement d’un nouveau produit, que les différents choix de conception permettent bien la convergence du produit final vers un niveau de fiabilité objectif.

Sur la base d’une étude de l’état de l’art, nous avons d’abord identifié les approches généralement utilisées dans le cadre d’analyses prévisionnelles de fiabilité. Leur hiérarchisation par rapport à leur impact sur le processus de conception de systèmes mécaniques, dont nous exploitons une décompositon systématique classique, a été réalisée. Plus précisément, leur effet est mesuré par leur date d’application au cours du processus de conception et par les interactions qu’elles sont à même de générer entre les métiers de la conception et celui de la fiabilité. Nous avons ainsi distingué :

- les méthodes qualitatives telles que les Analyses des Modes de Défaillance, de leurs Effets et de leur Criticité (AMDEC) qui constituent un prérequis nécessaire à toute interprétation quantitative additionnelle ;
- leurs interprétations quantitatives, qualifiées de *systèmes sans physique*, issues de la théorie de la fiabilité des systèmes ;
- leurs interprétations quantitatives, qualifiées de *physiques sans système*, issues de la théorie de la fiabilité des structures et d’approches de type mécano-fiabiliste.

Il apparaît qu’aucune n’accompagne l’effort de conception de manière optimale ni ne stimule parfaitement les interactions souhaitables entre les métiers de la conception et

ceux de la fiabilité tout au long du processus de conception de systèmes mécaniques.

**L’objectif de la thèse consiste donc à participer au développement d’une approche de fiabilité prévisionnelle reposant sur une formalisation à la fois *système et physique*, tirant tout le parti d’approches complémentaires issues de disciplines fiabilistes différentes et s’intégrant mieux aux étapes successives du processus de conception de systèmes mécaniques.**

**Du point de vue académique.** Le travail présenté dans ce mémoire a conduit à la mise au point d’une méthodologie d’analyse basée sur une représentation *système et physique* originale du problème de fiabilité. Elle favorise le pilotage de l’activité de conception fiable en permettant, à chaque instant de son processus de :

- positionner la définition technique d’un système par rapport à son objectif de fiabilité ;
- modéliser, outre la logique de défaillance, l’aspect système de la physique de défaillance ;
- fournir une réponse adaptée, fonction de la connaissance disponible ;
- exhiber les phénomènes physiques et les paramètres de conception influant sur la fiabilité ;
- définir des arguments d’aide à la conception et au dimensionnement fiable ;
- exploiter les synergies entre les différents acteurs de la conception.

D’abord, nous avons proposé une modélisation physico-probabiliste évolutive et originale des scénarios phénoménologiques de défaillance à partir de la donnée d’analyses de défaillance qualitatives classiques. Celle-ci est obtenue selon les quatre étapes fondamentales suivantes :

1. l’élaboration de la structure du modèle quantitatif par l’application d’une grammaire spécifique reposant sur des règles de décomposition et des critères de granularité empiriques.
2. la modélisation probabiliste évolutive des données élémentaires de défaillance par actualisation Bayésienne de la connaissance disponible.
3. la modélisation mathématique évolutive des phénomènes physiques et des fonctions de performance par le recours aux techniques de métamodélisation.
4. l’implémentation d’une méthodologie de propagation de l’aléa sur les données d’entrée et sur les comportements physiques à travers l’ensemble du modèle. Celle-ci repose sur l’approximation de variables aléatoires quelconques par leur développement sur la base d’un chaos polynomial et la reconstruction analytique de leur fonction de densité de probabilité sous la forme d’une exponentielle d’un polynôme.

Ensuite, nous avons proposé l’évaluation d’un tel modèle de fiabilité au moyen des outils classiques du couplage mécano-fiabiliste. Nous avons défini plusieurs stratégies d’analyse et introduit le concept d’analyse *FORM/SORM* de type “court-circuit”. D’une part, nous évaluons les probabilités d’occurrence marginales des modes de défaillance (probabilités de défaillance) potentiellement générés par les scénarios examinés, leurs corrélations et leurs probabilités d’occurrence conditionnelles. D’autre part,

nous construisons des chaînes de facteurs d'importance. Elles ont pour intérêt de caractériser l'influence de chaque variable du modèle sur la réalisation des phénomènes physiques qu'elle induit et sur la fiabilité du système : à n'importe quel niveau des scénarios de défaillance physico-probabilistes, à travers n'importe quelle branche dans laquelle elle intervient.

Enfin, à partir de l'étude d'un sous-système de moteur Diesel d'automobile, nous avons souligné la capacité de ces produits à piloter, à guider l'activité de conception. Nous avons effectivement montré comment ils assurent la définition d'arguments d'aide au dimensionnement fiable ainsi que la création de plans de validations ou d'améliorations de la fiabilité adéquats.

**Du point de vue industriel.** La première retombée de nos travaux de recherche est l'introduction de la culture de l'incertain dans les métiers de la conception industrielle. A l'origine la conception s'est intéressée à la recherche des quantités optimales, c'est-à-dire des meilleures valeurs nominales. Aujourd'hui, il est également nécessaire de prendre en compte la variabilité car un niveau de performance, a priori moins bon, peut être une meilleure solution s'il diminue la variabilité et engendre de ce fait une meilleure appréciation de la fiabilité ou de la durée de vie des systèmes mécaniques. Cette entreprise n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire : elle nécessite, des concepteurs et des décideurs, l'adoption d'une culture probabiliste du dimensionnement et donc d'un nouvel effort de conceptualisation.

Le second apport de nos travaux de recherche se situe au niveau du développement d'une plateforme logicielle implémentée sous *Matlab*, support de l'approche par la modélisation *système et physique* du problème de fiabilité suggérée. Celle-ci a été motivée par deux objectifs essentiels :

- automatiser la réalisation et le traitement des modèles *systèmes et physiques* de fiabilité qui deviennent vite lourds et fastidieux à mettre en œuvre “à la main”.
- assurer la “vulgarisation” de l'analyse de fiabilité proposée afin de convaincre les acteurs de la conception industrielle ainsi que les décideurs de son potentiel.

## 10.2 Perspectives

Il est nécessaire de garder à l'esprit que l'approche proposée constitue une première tentative d'unification des approches de fiabilité par formalisations *système sans physique* et *physique sans système*. Elle offre, par conséquent, de nombreuses perspectives de recherche. Celles-ci concernent aussi bien chacune des étapes de la démarche proposée de manière spécifique, que l'intégration encore plus poussée de la méthodologie, dans son ensemble, au sein de l'activité collaborative que représente un processus de conception concourrant [Tic04, RYE06].

### 10.2.1 Au niveau des différents maillons de la méthodologie proposée

**Elaboration de la structure de scénarios de défaillance logiques, physiques et probabilistes.** Elle doit d'abord bénéficier de l'optimisation des analyses de dé-



faillance qualitatives et physiques, par une meilleure capitalisation et une meilleure réexploitation des connaissances génériques sur les défaillances potentielles et avérées des systèmes étudiés. Dans ce sens, nous avons participé, dans le cadre de réflexions connexes à nos travaux de recherche, au développement d'une première approche de capitalisation des analyses de défaillance sous la forme originale d'une base de données formalisée par un réseau qualitatif causal [RHPS06]. Ensuite, il est nécessaire de poursuivre la définition de la grammaire de passage de la vision qualitative et système de la physique de défaillance à la structure d'un modèle voué à son interprétation quantitative. La formalisation de cette grammaire vise à lui conférer un caractère plus universel, de sorte qu'elle constitue une base saine pour la poursuite de l'unification des approches de fiabilité exploitant une modélisation de type *système et physique*.

**Modélisation probabiliste évolutive des données élémentaires de défaillance.**

Elle doit passer par une meilleure exploitation des données, des échantillons de taille réduite comme de son actualisation *a posteriori* sachant de nouvelles informations. Une voie de progrès possible consiste à poursuivre l'exploitation au plus tôt de l'information issue du retour d'expérience, qu'il soit issu de résultats d'essais, des jugements d'experts ou encore des données du terrain.

**Modélisation mathématique évolutive des phénomènes physiques et des fonctions de performance.**

Elle doit profiter de l'implémentation de nouvelles méthodes pour la prise en compte efficace et une meilleure maîtrise des écarts de la modélisation à la réalité physique. Les approches non paramétriques semblent être les plus prometteuses [Soi05]. Lorsque la connaissance des phénomènes physiques est insuffisante, le physicien doit quand même apporter une réponse pour la construction d'un modèle qui ne résulte alors que de l'expertise : la voie de la métamodélisation semble être à privilégier. Dans le cas spécifique de la modélisation d'une fonction de performance, nous pouvons également imaginer une collaboration plus active entre les physiciens et les spécialistes des essais : il s'agit de mieux prendre en compte les résultats d'essais pour sa caractérisation. Dans ce contexte, nous partageons l'avis que la notion de point expérimental le plus probable est à introduire [Lem05a].

**Méthodologie de propagation de l'aléa sur les données d'entrée.** Elle n'est pas figée. Elle est en mesure de bénéficier de l'ensemble des développements, déjà en cours, visant à la définition d'approches plus précises et requérant toujours moins d'appels aux codes de calcul et donc plus économiques en temps d'évaluation.

**Techniques du calcul mécano-fiabiliste.** Celles que nous avons développées et déployées dans le cadre de nos travaux de recherche demeurent essentiellement performantes dans un contexte statique. Une voie de progrès intéressante et fondamentale se situe donc au niveau de l'implémentation d'outils assurant l'analyse de problèmes dépendant de manière complexe du paramètre temps. Intuitivement, et malgré un effort supplémentaire de calcul considérable, la méthode *PHI2* [ARSL04] semble être aujourd'hui la plus appropriée et la plus en mesure de fournir des résultats pertinents.

**Optimisation de la conception par la fiabilité.** L'exploitation des multiples produits de l'analyse de fiabilité par une interprétation *système et physique*, à des fins d'optimisation de la conception, est à ce jour réalisée au moyen d'une procédure experte. Autrement dit, elle n'est pas automatisée. Une voie de progrès consisterait donc à définir les bases du problème d'optimisation multi-critères sous jacent et de poser les bases d'une procédure de résolution numérique adaptée.

**Plateforme logicielle RELAB.** Elle constitue le support de la méthodologie et des échanges de données nécessaires à de telles analyses de fiabilité. Elle possède, bien sûr, la capacité d'être améliorée et d'intégrer de nouveaux modules (*e.g.* une option assurant le traitement des données pour une modélisation probabiliste optimale des paramètres élémentaires de défaillance). Les efforts d'implémentation doivent être prolongés, et pourquoi pas, faire l'objet d'un développement industriel dédié.

### 10.2.2 Au niveau de la méthodologie dans son ensemble

D'une part, l'un des enjeux consiste à catalyser les synergies des multiples acteurs de la conception au plus tôt du processus de développement. Le but est de profiter d'une approche qui s'intègre encore mieux aux différentes étapes d'un processus de conception, en particulier dès les premières itérations des conceptions conceptuelle et préliminaire. Il s'agit avant tout d'établir des liens toujours plus étroits entre les techniques d'analyse qualitatives, les méthodes reposant sur une interprétation quantitative subjective des défaillances et les approches reposant sur la modélisation objective de la physique de défaillance et des incertitudes de conception. Dans ce but, l'établissement de ponts avec des techniques telles que les réseaux Bayésiens, qui permettent de manipuler l'ensemble de l'information subjective disponible et de l'actualiser dès que des données plus objectives se présentent, est une des pistes possibles à privilégier. Dans cette recherche d'unification *physique et système* des modélisations du problème de fiabilité, nous insistons une nouvelle fois sur l'importance de la création d'un métalangage permettant de formaliser simplement les règles de communication entre les multiples formalismes (système, qualitatif, quantitatif, probabiliste, ...).

D'autre part, nous avons ici essentiellement évoqué le problème de l'optimisation de la conception du point de vue de la fiabilité. Seulement, nous sommes conscient que l'activité de conception doit également satisfaire à d'autres objectifs technico-économiques visant à optimiser, la fabrication, les temps et les coûts de développement, les performances et les prestations des systèmes mécaniques, *etc.* Il s'agit donc de travailler à son intégration dans le cadre d'une procédure plus générale. Le meilleur compromis de conception ne peut être déterminé que par la résolution d'un problème d'optimisation multi-critères sous de très nombreuses contraintes. Une voie de progrès consiste donc à intégrer cette vision de la conception pour la fiabilité et la démarche spécifique que nous préconisons dans le cadre de l'approche plus globale, classiquement appelée *design for X*, et de profiter de la notion d'ingénierie collaborative ou concurrente.

# Bibliographie

- [Ada06] CD ADAPCO. Star-CD (2006). <http://www.cd-adapco.com>, 60 Broadhollow Road, Melville, NY 11747 USA.
- [Aka04] Y. AKAO. “Quality Function Deployment : Integrating Customer Requirements Into Product Design”. Productivity Press, Cambridge (2004).
- [Aki91] K. AKIYAMA. “Function Analysis : Systematic Improvement of Quality and Performance”. Productivity Press, Cambridge (1991).
- [AR81] A. AMENDOLA AND G. REINA. Event sequences and consequence spectrum : A methodology for probabilistic transient analysis. *Nuclear Science and Engineering* **77**(3), 297–315 (1981).
- [AR02] C. ANDRIEU-RENAUD. “Fiabilité Mécanique des Structures Soumises à des Phénomènes Dépendant Du Temps”. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II & LaRAMA IFMA (2002).
- [ARSL04] C. ANDRIEU-RENAUD, S. SUDRET, AND M. LEMAIRE. The PHI2 method : A way to compute time-variant reliability. *Reliability Engineering & System Safety* **84**(1), 75–86 (2004).
- [AS70] M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN. “Handbook of Mathematical Functions”. Dover Publication, New York (1970).
- [Atw83] C.L. ATWOOD. Common cause failure rates for pumps. Technical Report NUREG/CR-2098, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington D.C. (1983).
- [AW85] R. ASKEY AND J. WILSON. Some basic hypergeometric polynomials that generalize jacobi polynomials. *Memoirs of the American Mathematical Society* **54**(319), 1–55 (1985).
- [Ayy01] B.M. AYYUB. “Elicitation of Expert Opinions for Uncertainty and Risks”. CRC press, Boca Raton (2001).
- [BA86] R.M. BENNETT AND A.H.-S. ANG. Formulation of structural system reliability. *Journal of Engineering Mechanics* **112**(11), 1135–1151 (1986).
- [Bal98] H. BALDEWECK. “Méthode Des Éléments Finis Stochastiques - Applications à la Géotechnique et à la Mécanique de la Rupture”. PhD thesis, Université d’Evry Val d’Essone (1998).
- [Bar94] R.R. BARTON. Metamodeling : A state of the art review. In J.D. TEW, S. MANIVANNAN, D.A. SADOWSKI, AND A.F. SEILA, editors, “Proc. of the 1994 Winter Simulation Conference, Lake Buena Vista, USA, December 11-14, 1994”, pages 237–244, New York, USA (1994). ACM Press.

- [BDRS06] M. BOITEAU, Y. DUTUIT, A. RAUZY, AND J.-P. SIGNORET. The AltaRica data-flow language in use : Modeling of production availability of a multi-state system. *Reliability Engineering & System Safety* **91**(7), 747–755 (2006).
- [Ben91] C. BENZAKEN. “Systèmes Formels : Introduction à la Logique et à la Théorie des Langages”. Masson, Paris (1991).
- [BF82] G.K. BHATTACHARAYYA AND A. FRIES. Fatigue failure models : Birnbaum-saunders vs. inverse gaussian. *IEEE Transaction on Reliability* **31**, 439–441 (1982).
- [BHH05] G.E.P. BOX, W.G. HUNTER, AND J.S. HUNTER. “Statistics for Experimenters : An Introduction to Design, Data Analysis and Model Building”. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition (2005).
- [BHMV02] M. BOUISSOU, S. HUMBERT, S. MUFFAT, AND N. VILLATTE. KB3 tool : Feedback on knowledge bases. In “Proc. of the  $\lambda\mu$ 13 and 2002 ESREL - European Safety and Reliability Conference, Lyon, France, March 18-21, 2002”, Bagnaux, France (2002). ISdF.
- [Bje84] P. BJERAGER. “Reliability Analysis of Structural Systems”. PhD thesis, Technical University of Denmark, Lyngby (1984).
- [BK02] Z. BAUSE AND P. KRITZINGER. “Stochastic Petri Nets - An Introduction to the Theory”. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2nd edition (2002).
- [BM05] L. BOUZAÏENE-MARLE. “AVISE, Anticipation du Vieillissement par Interrogation et Stimulation d’Experts”. PhD thesis, Ecole Centrale Paris (2005).
- [BN02] V. BAGDONAVICIUS AND M. NIKULIN. “Accelerated Life Models - Modeling and Statistical Analysis”. Chapman & Hall (2002).
- [Boc98] J.-C. BOCQUET. “Conception de Produits Mécaniques”, chapter Ingénierie simultanée, conception intégrée, pages 29–52. M. Tollenaere Ed., Hermès (1998). ISBN 2-86601-694-7.
- [Bon95] J.-L. BON. “Fiabilité Des Systèmes - Méthodes Mathématiques”. Techniques Stochastiques. Masson, Paris (1995).
- [Bos06] R. BOSCH. “Diesel-Engine Management”. John Wiley & Sons, New York, 4th edition (2006). ISBN : 0-4700-2689-8.
- [BP65] R.E. BARLOW AND F. PROSCHAN. “Mathematical Theory of Reliability”. John Wiley & Sons, New York (1965).
- [Bre84] K. BREITUNG. Asymptotic approximation for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics* **110**(3), 357–366 (1984).
- [BS69] Z.W. BIRNBAUM AND S.C. SAUNDERS. A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability* **6**(2), 319–327 (1969).
- [BS06] M. BOUISSOU AND C. SEGUIN. Comparaison des langages de modélisation FIGARO et AltaRica. In “Proc. of the  $\lambda\mu$ 15, Lille, France, Octobre 10-12, 2006”, Bagnaux, France (2006). IMdR - SdF.

- [BSL04] M. BERVEILLER, B. SUDRET, AND M. LEMAIRE. Presentation of two methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. In “Proc. of the 9th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Albuquerque, USA, July 26-28, 2004”, Reston, USA (2004). ASCE.
- [BT92] G.E.P BOX AND G.C. TIAO. “Bayesian Inference in Statistical Analysis”. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, New York (1992).
- [CG06] G. COMA AND P. GASTALDI. HCCI : A combustion for the future? *International Journal of Vehicle Design* **41**(1-4), 18–31 (2006). Special Issue on : New Strategies in Automotive Diesel Engines for Meeting Upcoming Pollutant Emission Restrictions.
- [CGS05] S.M. CLARKE, J.H. GRIEBSCHE, AND T.W. SIMPSON. Analysis of support vector regression for approximation of complex engineering analyses. *Journal of Mechanical Design* **127**(6), 1077–1087 (2005).
- [Cor75] M. CORAZZA. “Techniques Mathématiques de l’Analyse de la Fiabilité Prévisionnelle des Systèmes”. Cépaduès, Toulouse (1975).
- [CT86] M. CIVANALAR AND H. TRUSSEL. Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy Sets and Systems* **18**, 1–13 (1986).
- [CT97] C. COCOZZA-THIVENT. “Processus Stochastiques et Fiabilité des Systèmes”. Collection Mathématiques et Applications. Springer-Verlag, Heidelberg (1997).
- [DB86] O. DITLEVSEN AND P. BJERAGER. Methods of structural systems reliability. *Structural Safety* **3**(3-4), 195–229 (1986).
- [DB00] C. DE BOOR. “Practical Guides to Splines”. Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, New York, revised edition (2000).
- [DBB92] J.B. DUGAN, S.J. BAVUSO, AND M.A. BOYD. Dynamic fault-tree models for fault-tolerant computer system. *IEEE Transactions on Reliability* **41**, 363–377 (1992).
- [DCST96] Y. DUTUIT, E. CHÂTELET, J.P. SIGNORET, AND P. THOMAS. Dependability modeling and evaluation by using stochastic petri nets : Application to two test cases. *Reliability Engineering & System Safety* **55**(2), 117–124 (1996).
- [Dem68] A.P. DEMPSTER. A generalization of bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **30**, 205–247 (1968).
- [Dit87] O. DITLEVSEN. The structural system reliability problem : Qualitative considerations. In N. LIND, editor, “Proc. of the 5th International Conference on Applied Statistics and Probability, Vancouver, Canada, 1987”, pages 1–11, Waterloo, Canada (1987). University of Waterloo.
- [DK89] A. DER KIUREGHIAN. Measures of structural safety under imperfect states of knowledge. *Journal of Structural Engineering* **115**(5), 1119–1140 (1989).

- [DK01] A. DER KIUREGHIAN. Analysis of structural reliability under model and statistical uncertainties : A bayesian approach. *Computational Structural Engineering* **1**(2), 81–87 (2001).
- [DK06] A. DER KIUREGHIAN. System reliability revisited. In P.K. DAS, editor, “Integrating Structural Analysis, Risk & Reliability, In Proc. of the 3rd ASRANet International Colloquium, Glasgow, July 10-12, 2006”, Glasgow (2006). ASRANet.
- [DKDS06] A. DER KIUREGHIAN, O. DITLEVSEN, AND J. SONG. Availability, reliability and downtime of systems with repairable components. *Reliability Engineering & System Safety* **In Press, Corrected Proof**(Available online) (2006).
- [DKLH87] A. DER KIUREGHIAN, H.-Z. LIN, AND S.-J. HWANG. Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics* **113**(8), 1208–1225 (1987).
- [DL06] F. DEHEEGER AND M. LEMAIRE. Reliability analysis by support vector machine classification. In P.K. DAS, editor, “Integrating Structural Analysis, Risk & Reliability, Proc. of the 3rd ASRANet International Colloquium, Glasgow, July 10-12, 2006”, Glasgow (2006). ASRANet.
- [DLR86] N. DYN, D. LEVIN, AND S. RIPPA. Numerical procedures for surface fitting of scattered data by radial functions. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing* **7**(2), 639–659 (1986).
- [DM96] O. DITLEVSEN AND H. O. MADSEN. “Structural Reliability Methods”. John Wiley & Sons, New York (1996). ISBN : 0-471-96086-1.
- [DMS<sup>+</sup>04] G. DREYFUS, J.-M. MARTINEZ, M. SAMUELIDES, M.B. GORDON, F. BADRAN, S. THIRIA, AND L. HÉRAULT. “Réseaux de Neurones, Méthodologies et Applications”. Eyrolles, Paris, 2nd edition (2004).
- [DoD80] US DEPARTMENT OF DEFENSE DoD. MIL-STD 785 : Reliability program for systems and equipment development and production (1980).
- [DP88] D. DUBOIS AND H. PRADE. “Possibility Theory. An Approach to Computerized Processing of Uncertainty”. Plenum Press, New York (1988).
- [DP98] G. DEMENGEL AND J.P. POUGET. “Modèles de Bézières, B-splines et des Nurbs”. Ellipses, Paris (1998).
- [DR01] Y. DUTUIT AND A. RAUZY. Efficient algorithms to assess component and gate importance in fault tree analysis. *Reliability Engineering & System Safety* **72**(2), 213–222 (2001).
- [Dra51] N.R. DRAPER. Properties of distributions resulting from certain simple transformations of the normal distribution. *Biometrika* **39**, 290–301 (1951).
- [DRS99] Y. DUTUIT, A. RAUZY, AND J.-P. SIGNORET. Evaluation of systems reliability by means of binary decision diagram. In “Proc. of the Probabilistic Safety Assessment Conference (PSA’99), Washington D.C., August 22-26, 1999”, pages p. 521–529, Washington D.C. (1999). American Nuclear Society.

- [DS92] J. DEVOOGHT AND C. SMIDTS. Probabilistic reactor dynamics. 1. the theory of continuous event trees. *Nuclear Science and Engineering* **111**(3), 229–240 (1992).
- [DSC00] J.B. DUGAN, K.J. SULLIVAN, AND D. COPPIT. Developping a low-cost high-quality software tool for dynamic fault-tree analysis. *IEEE Transactions on Reliability* **49**, 49–59 (2000).
- [Ele00] A.O.C. ELEGBEDE. “Contribution aux Méthodes d’Allocation d’Exigences de Fiabilité aux Composants de Systèmes”. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes (2000).
- [Er98] G.K. ER. A method for multi-parameter PDF estimation of random variables. *Structural safety* **20**(4), 341–355 (1998).
- [Fle75] K.N. FLEMING. A reliability model for common mode failures in redundant safety systems. In “Proc. of the Sixth Annual Pittsburgh Conference on Modeling and Simulations”, Research Triangle Park, NC, USA (1975). Instrument Society of America.
- [Fow90] T. FOWLER. “Value Analysis in Design”. Van Nostrand Reinhold, New York (1990).
- [Fre47] A.M. FREUDENTHAL. The safety of structures. *Transaction of the ASCE* **112**, 125–180 (1947).
- [Fri91] J.H. FRIEDMAN. Multivariate adaptation regression splines. *The Annals of Statistics* **19**(1), 1–141 (1991).
- [GA04] H.M. GOMES AND A.M. AWRUCH. Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis. *Structural Safety* **26**(1), 49–67 (2004).
- [GBL03] N. GAYTON, J.M. BOURINET, AND M. LEMAIRE. CQ2RS : A new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety* **25**(1), 99–121 (2003).
- [GBS72] B. GNEDENKO, Y. BÉLIAEV, AND A. SOLOVIEV. “Méthodes Mathématiques en Théorie de la Fiabilité : Principales Caractéristiques de Fiabilité et leur Analyse Statistique”. Mir, Moscou, french edition (1972).
- [GDKM93] A. GEYSKENS, A. DER KIUREGHIAN, AND P. MONTEIRO. BUMP : Bayesian updating of model parameters. Technical Report UCB/SEMM-93/06, University of California, Berkeley (1993).
- [GJ79] M.R. GAREY AND D.S. JOHNSON. “Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness”. W.H. Freeman & Co, New York (1979).
- [GS91] R. GHANEM AND P. SPANOS. “Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach”. Springer Verlag, New York (1991). (reissued by Dover Publications, 2004).
- [GTI06] GAMMA TECHNOLOGIES INCORPORATION GTI. GT power (2006). <http://www.gtisoft.com>, 601 Oakmont Lane, Suite 220 Westmont, IL 60559 USA.

- [Hac02] I. HACKING. “L’Émergence de la Probabilité”. Seuil (2002).
- [Häh03] A. HÄHNEL. “FERUM - Finite Element Reliability Using Matlab : Code Development and Implementation of New Features”. Master Thesis, LaRAMA IFMA & University of California at Berkeley (2003).
- [Har86] A. HARBITZ. An efficient sampling method for probability of failure calculation. *Structural Safety* **3**(2), 109–115 (1986).
- [HGKR87] M. HOHENBICHLER, S. GOLLWITZER, W. KRUSE, AND R. RACKWITZ. New light on first- and second-order reliability methods. *Structural Safety* **4**(4), 267–284 (1987).
- [HJO04] J.C. HELTON, J.D. JOHNSON, AND W.L. OBERKAMPF. An exploration of alternative approaches to the representation of uncertainty in model predictions. *Reliability Engineering and System Safety* **85**(1-3), 39–71 (2004).
- [HL74] A.M. HASOFER AND N.C. LIND. Exact and invariant second moment code format. *Journal of Engineering Mechanics* **100**(1), 111–121 (1974).
- [HLR05] A. HÄHNEL, M. LEMAIRE, AND F. RIEUNEAU. Contributions towards mechanical-based reliability prediction framework for complex system. In G. AUGUSTI, G.I. SCHUËLLER, AND M. CIAMPOLI, editors, “Proc. of the 9th ICOSSAR - Safety and Reliability of Engineering Systems and Structures”, pages 408 and CD-ROM, Rotterdam, Netherlands (2005). Millpress.
- [HO04] J.C. HELTON AND W.L. OBERKAMPF. Alternative representations of epistemic uncertainty. *Reliability Engineering & System Safety* **85**(1-3), 1–10 (2004). Guest Editorial.
- [HR81] M. HOHENBICHLER AND R. RACKWITZ. Non-normal dependent vectors in structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics* **107**(6), 1227–1249 (1981).
- [HRL05] A. HÄHNEL, F. RIEUNEAU, AND M. LEMAIRE. A new model formalism for mechanical-based reliability analysis of systems. In “Proc. of the Annual Reliability and Maintainability Symposium - (RAMS’05), Washington, USA, January 24-27, 2005”, pages 09D5 – CD-ROM, Piscataway, USA (2005). IEEE.
- [Hur04] J.E. HURTADO. “Structural Reliability - Statistical Learning Perspectives”. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Band 17. Springer Verlag, Berlin (2004).
- [IEC95] INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION IEC. International standard 1164 : Reliability growth - statistical test and estimation methods (1995).
- [Isu99] S.S. ISUKAPALLI. “Uncertainty Analysis of Transport-Transformation Models”. PhD thesis, The State University of New Jersey (1999).
- [Jen01] F.V. JENSEN. “Bayesian Networks and Decision Graphs”. Springer-Verlag, New York (2001).



- [JKDW01] L. JAULIN, M. KIEFFER, O. DIDRIT, AND E. WALTER. “Applied Interval Analysis”. Springer Verlag, London (2001).
- [Joh49] N.L. JOHNSON. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika* **36**, 149–176 (1949).
- [Kee04] A. KEESE. “A General Purpose Framework for Stochastic Finite Elements”. PhD thesis, Technischen Universität Braunschweig (2004).
- [KF88] G. KLIR AND T. FOLGER. “Fuzzy Sets, Uncertainty and Information”. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1988).
- [KGC75] A. KAUFMANN, D. GROUCHKO, AND R. CRUON. “Modèles Mathématiques pour l’Étude de la Fiabilité des Systèmes”. Masson & Cie, Paris (1975).
- [Kir94] B. KIRWAN. “A Guide to Practical Human Reliability Assessment”. Taylor & Francis, London (1994).
- [KK92] J.N. KAPUR AND H.K. KESAVAN. “Entropy Optimization Principles with Applications”. Academic Press, San Diego (1992).
- [LAB<sup>+</sup>95] J.-C. LAPRIE, J. ARLAT, J.-P. BLANQUART, A. COSTES, Y. CROUZET, Y. DESWARTE, J.-C. FABRE, H. GUILLERMAIN, M. KAÂNICHE, K. KANOUN, C. MAZET, D. POWELL, C. RABÉJAC, AND P. THÉVENOD. “Guide de la Sûreté de Fonctionnement”. Cépaduès, Toulouse (1995).
- [Lan04] A. LANNOY, editor. “ESReDA - Lifetime Management of Structures”. Det Norske Veritas, Oslo (2004).
- [Lav03] G. LAVAUD. “Optimisation sur Modèle de Krigeage”. Master Thesis, Ecole Centrale de Lyon & Renault (2003).
- [LDK86] P.L. LIU AND A. DER KIUREGHIAN. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics* **1**(2), 105–112 (1986).
- [Lee95] L.M. LEEMIS. “Reliability : Probabilistic Models and Statistical Methods”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1995).
- [Lem98] M. LEMAIRE. Eléments finis et fiabilité : Un mariage à la mode. In A. MÉBARKI, D. BOISSIER, AND D. BREYSSE, editors, “In Proc. de la 2ième Conférence Nationale JN-FIAB’98”, pages 95–112, Paris (1998). Hermès.
- [Lem04] M. LEMAIRE. “ESReDA - Lifetime Management of Structures”, chapter How to manage industrial studies? A. Lannoy Ed., Det Norske Veritas, Oslo (2004).
- [Lem05a] M. LEMAIRE. Comment manager une étude mécano-fiabiliste. In “Actes du 17ème Congrès Français de Mécaniques, Troyes, France, 29 Août - 2 Septembre, 2005”, Paris La Défense (2005). Association Française de Mécanique (AFM).
- [Lem05b] M. LEMAIRE. “Fiabilité Des Structures : Couplage Mécano-Fiabiliste Statique”. Hermes Science Publication (2005). En collaboration avec A. Chateaneuf et J.C. Mitteau. ISBN : 2-7462-1057-6.

- [Lig98] J.-C. LIGERON. Les études prévisionnelles de fiabilité en mécanique : Faits et méfaits. In “Actes du Séminaire du 12 mai 1998 de la Société des Ingénieurs de l’Automobile - Méthodes de fiabilité prévisionnelle”, Paris (1998). SIA. R-98-09.
- [Lim05] N. LIMNIOS. “Arbres de Défaillances”. Hermès - Lavoisier, Paris, 2nd edition (2005).
- [LM74] J.-C. LIGERON AND C. MARCOVICI. “Utilisation Des Techniques de Fiabilité En Mécanique”. Tec & Doc, Paris (1974).
- [LP01] A. LANNOY AND H. PROCACCIA. “L’utilisation du Jugement d’Expert en Sûreté de Fonctionnement”. Tech & Doc (2001).
- [LP05] A. LANNOY AND H. PROCACCIA. “Evaluation et Maîtrise du Vieillissement Industriel”. EDF R&D. Tec & Doc, Paris (2005).
- [LSS00a] P.E. LABEAU, C. SMIDTS, AND S. SWAMINATHAN. Dynamic reliability : Towards an integrated platform for probabilistic risk assessment. *Reliability Engineering & System Safety* **68**(3), 219–254 (2000).
- [LSS00b] P.E. LABEAU, C. SMIDTS, AND S. SWAMINATHAN. Dynamic reliability : Towards integrated platform for probabilistic risk assessment. *Reliability Engineering & System Safety* **68**(3), 219–254 (2000).
- [Lue86] D. LUENBERGER. “Introduction to Linear and Non-Linear Programming”. Addison & Wesley, Reading (1986).
- [Mak02] A. MAKARTCHOUCK. “Diesel Engine Engineering : Thermodynamics, Dynamics, Design, and Control”. Marcel Dekker, New York (2002). ISBN : 0-8247-0702-8.
- [Mal97] P. MALLIAVIN. “Stochastic Analysis”. Springer Verlag, New York (1997).
- [May26] M. MAYER. “Die Sicherheit der Bauwerke und Ihre Berechnung Nach Grenzkraften”. Springer Verlag, Berlin (1926).
- [MBC79] M.D. MCKAY, R.J. BECKMAN, AND W.J. CONOVER. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from computer code. *Technometrics* **2**, 239–245 (1979).
- [MBC<sup>+</sup>95] M. A. MARSAN, G. BALBO, G. CONTE, S. DONATELLI, AND G. FRANCESCHINIS. “Modeling with Generalized Stochastic Petri Nets”. Parallel Computing. John Wiley & Sons, West Sussex (1995).
- [MDCS98] R. MANIAN, J.B. DUGAN, D. COPPIT, AND K. SULLIVAN. Combining various solution techniques for dynamic fault tree analysis of computer systems. In “Proc. of the 3rd IEEE International High-Assurance Systems Engineering Symposium, Washington, D.C., November 13-14, 1998”, pages 21–28, Piscataway, USA (1998). IEEE.
- [Mel90] R.E. MELCHERS. Improved importance sampling methods for structural system reliability calculation. In A.H-S. ANG, M. SHINOZUKA, AND G.I. G.I. SCHUELLER, editors, “Proc. of the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR ’89”, pages 1185–1192, New York (1990). ASCE.

- [MGH03] R.L. MASON, R.F. GUNST, AND J.L. HESS. “Statistical Design and Analysis of Experiments”. Wiley - Interscience, Hoboken, 2nd edition (2003).
- [MKK99] M. MODARRES, M. KAMINSKIY, AND V. KRIVTSOV. “Reliability Engineering and Risk Analysis : A Practical Guide”. Quality and Reliability /55. Marcel Dekker (1999).
- [MM95] R.H. MYERS AND D.C. MONTGOMERY. “Response Surface Methodology : Process and Product Optimization Using Design Experiments”. Wiley & Sons, New York (1995).
- [Mod93] M. MODARRES. “What Every Engineer Should Know About Reliability and Risk Analysis”. Marcel Dekker, New York (1993).
- [Moo66] R. MOORE. “Interval Analysis”. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1966).
- [Mor66] E. MORICE. Quelques modèles mathématiques de durée de vie. *Revue de Statistique Appliquée* **14**(1), 45–126 (1966).
- [Mos91] A. MOSLEH. Common cause failure : An analysis methodology and examples. *Reliability Engineering & System Safety* **34**(3), 249–292 (1991).
- [MR05] S. MAHADEVAN AND R. REBBA. Validation of reliability computational models using bayes networks. *Reliability Engineering & System Safety* **87**(2), 223–232 (2005).
- [MV05] D. MOENS AND D. VANDEPITTE. A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194**(12-16), 1527–1555 (2005).
- [MZS01] S. MAHADEVAN, R. ZHANG, AND N. SMITH. Bayesian networks for system reliability assessments. *Structural Safety* **23**(3), 231–251 (2001).
- [Nat62] A. NATAF. Détermination des distributions dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* **225**, 42–43 (1962).
- [Nel82] W. NELSON. “Applied Life Data Analysis”. John Wiley & Sons, New York (1982).
- [ODR<sup>+</sup>02] W.L. OBERKAMPF, S.M. DELAND, B.M. RUTHERFORD, K.V. DIEGERT, AND K.F. ALVIN. Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering & System Safety* **75**(3), 333–357 (2002).
- [OHS01] W.L. OBERKAMPF, J.C. HELTON, AND K. SENTZ. Mathematical representation of uncertainty. In “Proceedings of the 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials (SDM) Conference, Seattle, USA, April 16-19, 2001”, pages AIAA–2001–1645. AIAA (2001).
- [ØMR04] T. ØSTERAS, D.N.P. MURTHY, AND M. RAUSAND. Reliability performance and specifications in new product development. Technical Report, Norwegian University of Science and Technology (2004). ISBN 82-91917-17-5.
- [ONB02] P. D. T. O’CONNOR, D. NEWTON, AND R. BROMLEY. “Practical Reliability Engineering”. John Wiley & Sons, New York (2002).

- [OSD03] A. OLSSON, G. SANDBERG, AND O. DAHLBLOM. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety* **25**(1), 47–68 (2003).
- [PB96] G. PAHL AND W. BEITZ. “Engineering Design : A Systematic Approach”. Springer-Verlag, London, 2nd edition (1996).
- [Pel01] D.A. PELED. “Software Reliability Methods”. Springer Verlag, Berlin (2001).
- [Pen00] M. PENDOLA. “Fiabilité des Structures en Contexte d’Incertitudes Statistiques et d’Écarts de Modélisation”. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II & LaRAMA IFMA et Électricité de France - R&D (2000).
- [Pet62] C.A. PETRI. Kommunikation mit automaten. Technical Report Schriften des IIM Nr. 2, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn (1962).
- [PFTV02] W.H. PRESS, B.P. FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY, AND W.T. VETTERLING. “Numerical Recipe in C : The Art of Scientific Computing”. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition (2002).
- [PH54] E.S. PEARSON AND H.O. HARTLEY. “Biometrika Tables for Statisticians”. Cambridge University Press, Cambridge (1954).
- [PLM03] M. PENDOLA, M. LEMAIRE, AND A. MOHAMED. Méthodes d’Approximation d’une densité de probabilité à partir d’un échantillon de données. Technical Report, PHIMECA Engineering S.A. (2003).
- [Pow87] M.J.D. POWELL. “The Approximation of Functions and Data, Mason J, Cox M (Ed)”, chapter Radial Basis Function for Multivariate Interpolation : A Review. Clarendon Press (1987).
- [PT65] E.S. PEARSON AND M. TUCKEY. Distributions whose first moments are known. *Biometrika* **6**, 127–132 (1965).
- [Pui03] B. PUIG. “Modélisation et Simulation de Processus Stochastiques Non Gaussiens”. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (2003).
- [Rac98] R. RACKWITZ. Computational techniques in stationary and non-stationary load combination – a review and some extensions. *Journal of Structural Engineering* **25**(1), 1–20 (1998).
- [Rea90] J. REASON. “Human Error”. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [RF78] R. RACKWITZ AND B. FIESSLER. Structural reliability under combined load sequences. *Computer and Structures* **9**, 484–494 (1978).
- [RH04] M. RAUSAND AND A. HØYLAND. “System Reliability Theory : Models, Statistical Methods, and Applications”. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition (2004).
- [RHFD04] D.S. RIHA, J.E. HASSAN, M.D. FORREST, AND K. DING. Stochastic approach for vehicle crash model. In SAE, editor, “Proc. of the SAE World Congress & Exhibition, Detroit, USA, March 8-11, 2004”, pages ref : 2003-01-0460, Troy, USA (2004). SAE.

- [RHPS06] G. ROSSIGNOL, A. HÄHNEL, F. PETIT, AND P. SMAGUE. Reliability network tool : Une nouvelle approche pour l'Analyse de défaillance. In "Risques & Performances, Actes du 15ième Congrès de Maîtrise des Risques et de Sécurité de Fonctionnement, Lille, France, 9-12 octobre, 2006", Bagneux (2006). IMdR-SdF.
- [Rja59] A.R. RJANITZYN. "Calcul de la Rupture et Plasticité des Constructions". Eyrolles, Paris (1959).
- [Ros52] M. ROSENBLATT. Remarks on multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics* **23**, 470–472 (1952).
- [Rub81] R.Y. RUBINSTEIN. "Simulation and the Monte Carlo Method". John Wiley & Sons, New York (1981).
- [RYE06] L. ROUCOULES, B. YANNOU, AND B. EYNARD. "Ingénierie de la Conception et Cycle de Vie des Produits". Productique. Hermès, Paris (2006).
- [Sam98] F. SAMSON. "La Convention de Sauvegarde des Droits de l'Homme et des Libertés Fondamentales et l'Exercice des Pouvoirs Publics à l'Egard de l'Automobiliste ou les Droits de l'Homme au Quotidien". PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1998).
- [San02] Sandia National Laboratories. "The Epistemic Uncertainty Project and Workshop", Albuquerque, USA (2002). <http://www.sandia.gov/epistemic>.
- [Sap90] G. SAPORTA. "Probabilités, Analyse des Données et Statistiques". Editions Technip, Paris (1990).
- [Sas02] M.J. SASENA. "Flexibility and Efficiency Enhancements for Constrained Global Design Optimization with Kriging Approximations". PhD thesis, University of Michigan, Ann Harbor (2002).
- [Sav02] D.S. SAVRANSKY. "Engineering of Creativity – Introduction to TRIZ Methodology of Inventive Problem Solving". CRC Press, Boca Raton (2002).
- [SBL06] B. SUDRET, M. BERVEILLER, AND M. LEMAIRE. Stochastic finite element : A non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics* **15**(1-3), 81–92 (2006).
- [SC03] B. SUDRET AND I. CHERRADI. Quadrature method for finite element reliability analysis. In A. DER KIUREGHIAN, S. MADANAT, AND J.M. PESTANA, editors, "Proc. of the 9th ICASP - Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, San Francisco, USA, July 6-9, 2003", pages 387–394, Rotterdam, Netherlands (2003). Millpress.
- [Sch76] G. SCHAFER. "A Mathematical Theory of Evidence". Princeton University Press, Princeton (1976).
- [Sch85] G.I. SCHUËLLER. Current trends in systems reliability. In A.H.-S. KONISHI, I. ANG AND M. SHINOZUKA, editors, "Structural Safety and Reliability, In Proc. Of International Conference On Structural Safety and Reliability (COSSAR'85), Kobe, Japan, 1985", pages 139–148, New York (1985). IASSAR.

- [Sch98] P. SCHIMMERLING. “Pratique des plans d’expériences”. Tec & Doc, Paris (1998).
- [SDK00] B. SUDRET AND A. DER KIUREGHIAN. Stochastic finite element methods and reliability : A state-of-the-art report. Technical Report UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkeley (2000).
- [SG83] A.D. SWAIN AND H.E. GUTTMAN. Handbook of human reliability analysis with emphasis on nuclear power plant application. Technical Report NUREG/CR-1278, US Nuclear Regulatory Commission (1983).
- [Sha48] C.E. SHANNON. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal* **27**, 379–423 & 623–656 (1948).
- [Siu94] N. SIU. Risk assessment for dynamic systems. *Reliability Engineering & System Safety* **43**(1), 43–73 (1994).
- [Smo63] S.A. SMOLYAK. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of function. *Soviet Mathematics Doklady* **4**, 240–243 (1963).
- [SO83] A. STUART AND J.K. ORD. “Kendall’s Advanced Theory of Statistics”. John Wiley & Sons, New York (1983).
- [Soi05] C. SOIZE. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration* **288**(3), 623–652 (2005).
- [SP69] M. SCHWOB AND G. PEYRACHE. “Traité de Fiabilité”. Masson & Cie, Paris (1969).
- [SP03] J.E. STRUTT AND HALL P.L., editors. “Global Vehicle Reliability : Prediction and Optimization Techniques”. Professional Engineering Publishing, London (2003).
- [SPKA01] T.W. SIMPSON, J.D. PEPLINSKI, P.N. KOCH, AND J.K. ALLEN. Meta-models for computer-based engineering design : Survey and recommendations. *Engineering with computers* **17**(2), 129–150 (2001).
- [SVG05] L. SCHUEREMANS AND D. VAN GEMERT. Use of kriging to increase the predictive power of meta-models in structural reliability. In K. KOŁOWROCKI, editor, “Proc. of the 2005 ESREL - Advances in Safety and Reliability, Tri city (Gdynia - Sopot - Gdańsk), Poland, June 27-30, 2005”, Lisse, Netherlands (2005). Balkema.
- [Tag87] G. TAGUCHI. “System of Experimental Design : Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Costs”, volume 1 & 2. Unipub - Kraus International Publications, White Plain (1987).
- [Tic04] S. TICHKIEWITCH, editor. “Methods and tools for co-operative and integrated design, Proc. of the 2003 International CIRP Design Seminar, Laboratoire 3S, Grenoble, France, May 12-14, 2003”. Kluwer academic publishers (2004).
- [Tol98] M. TOLLENAERE. “Conception de Produits Mécaniques”. Hermès, Paris (1998).

- [TRF<sup>+</sup>06] B.H. THACKER, D.S. RIHA, S.H.K. FITCH, L.J. HUYSE, AND J.B. PLEMING. Probabilistic engineering analysis using the NESSUS software. *Structural Safety* **28**(1-2), 83–107 (2006).
- [Tve83] L. TVEDT. Two second-order approximations to the failure probability. Technical Report RDIV/20-004-83, Det Norske Veritas, Oslo (1983).
- [Tve90] L. TVEDT. Distribution of quadratic forms in normal space - application to structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics* **116**(6), 1183–1197 (1990).
- [Ull97] D.G. ULLMAN. “The Mechanical Design Process”. McGraw-Hill, New York, 2nd edition (1997).
- [Ven98] V. VENDITTI. “Aspects du Principe de Maximum d’Entropie en Modélisation Statistique”. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble 1 (1998).
- [VGND81] W.E. VESELY, F.F. GOLDBERG, ROBERTS N.H., AND HAASL D.F. Fault tree handbook. Technical Report NUREG-0492, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington (1981).
- [Vil88] A. VILLEMEUR. “Sûreté de Fonctionnement des Systèmes Industriels : Fiabilité - Facteurs Humains - Informatisation”. Collection de la Direction des Etudes et Recherche d’Electricité de France. Eyrolles (1988).
- [Wan05] L. WANG. “Support Vector Machines : Theory and Applications”. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Verlag, Berlin (2005).
- [Win87] S.R. WINTERSTEIN. Moment-based hermite models of random vibration. Technical Report 219, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, Lyngby (1987).
- [WJ95] M.P. WAND AND M.C. JONES. “Kernel Smoothing”. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall, London (1995).
- [WJ06] P. WEBER AND L. JOUFFE. Complex system reliability modeling with dynamic object oriented bayesian networks (DOOBN). *Reliability Engineering & System Safety* **91**(2), 149–162 (2006).
- [WTM96] M. WEBSTER, M. TATANG, AND G. MCRAE. Application of the probabilistic collocation method for an uncertainty analysis of a simple ocean model. Technical Report 4, MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change, Massachusetts Institute of Technology, Boston (1996).
- [XC03] L. XU AND G. CHENG. Discussion on : Moment methods for structural reliability. *Structural Safety* **25**(2), 193–199 (2003).
- [XK02] D. XIU AND G. KARNIAKAKIS. The wiener-askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal of Scientific Computing* **24**(2), 619–644 (2002).
- [Yan98] B. YANNOU. “Conception de Produits Mécaniques”, chapter Analyse fonctionnelle et analyse de la valeur, pages 77–104. M. Tollenaere Ed., Hermès (1998). ISBN 2-86601-694-7.

- [Yan01] B. YANNOU. Préconception de produits. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Institut National Polytechnique de Grenoble (2001).
- [Yu03] Y. YU. "Coupling Stochastic Finite Element Solver with ANSYS and Visualization of the Results". Master Thesis, Technische Universität Braunschweig (2003).
- [Zad65] L.A. ZADEH. Fuzzy sets. *Information and Control* **8**, 338–353 (1965).
- [Zad78] L.A. ZADEH. Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems* **1**, 3–28 (1978).
- [ZDK95] Y. ZHANG AND A. DER KIUREGHIAN. Two improved algorithms for reliability analysis. In R. RACKWITZ, G. AUGUSTI, AND A. BORRI, editors, "Proc. of the 6th IFIP WG7.5 - Reliability and Optimization of Structural Systems, Assisi, Italy, September 7-9, 1994", pages 297–304, London, UK (1995). Chapman & Hall.
- [ZHH<sup>+</sup>02] T.A. ZANG, M.J. HEMSCH, M.W. HILBURGER, S.P. KENNY, J.M. LUCKRING, P. MAGHAMI, S.L. PADULA, AND W.J. STROUD. Needs and opportunities for uncertainty-based multidisciplinary design methods for aerospace vehicles. Technical Report TM-2002-211462, NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA (2002).
- [ZL98] Z. ZONG AND K.Y. LAM. Estimation of complicated distributions using b-spline functions. *Structural Safety* **20**(4), 341–355 (1998).
- [ZL00] Z. ZONG AND K.Y. LAM. Bayesian estimation of complicated distributions. *Structural Safety* **22**(1), 81–95 (2000).
- [ZL01] Z. ZONG AND K.M. LAM. Bayesian estimation of 2-dimensionnal complicated distributions. *Structural Safety* **23**(2), 105–121 (2001).
- [ZO01] Y.-G. ZHAO AND T. ONO. Moment methods for structural reliability. *Structural Safety* **23**(1), 47–75 (2001).
- [ZO04] Y.-G. ZHAO AND T. ONO. On the problems of the fourth moment method. *Structural Safety* **26**(3), 343–347 (2004).



# Annexe A

## Notations

### A.1 Vecteurs, matrices et opérateurs

$\mathbf{X}$	Vecteur colonne - Matrice de dimension $n \times 1$
$\mathbf{X}$ ou $X_{ij}$	Matrice
$\cdot^T$	Opérateur de transposition
$\circ$	Opérateur de composition
$\nabla_{\mathbf{X}} M$	Gradient d'une transformation $M$ par rapport aux variables $X$
$\mathbf{J}_{\mathbf{XY}}$	Matrice Jacobienne des vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ , $\mathbf{J}_{\mathbf{XY}_{ij}} = \partial X_i / \partial Y_j$

### A.2 Grandeurs aléatoires

$\Pr$	Probabilité
v.a.	Variable aléatoire
$\omega$	Aléa, $\omega \in \Omega$ espace des réalisations possibles
$X(\omega)$ ou $X$	Variable aléatoire, en majuscule
$x$	Réalisation d'une variable aléatoire, en minuscule
$F_X(x)$	Fonction de répartition de probabilité de la v.a. $X$
$f_X(x)$	Fonction de densité de probabilité de la v.a. $X$
$\boldsymbol{\theta}_f$	Vecteur des paramètres de $f_X(x)$
$m_X$	Moyenne de la v.a. $X$
$\sigma_X$	Ecart-type de la v.a. $X$
$c_X$	Coefficient de variation de la v.a. $X$ ( $c_X = \sigma_X / m_X$ )
$\mathbf{E}[X]$	Espérance (moyenne) de la v.a. $X$
$\mathbf{var}(X)$	Variance de la v.a. $X$
$\text{cov}(X, Y)$	Covariance de $X$ et $Y$
$\text{cor}(X, Y)$	Corrélation de $X$ et $Y$
$\rho_{XY}$	Coefficient de corrélation de $X$ et $Y$
$\{x_1, \dots, x_n\}$	Echantillon de réalisations de la v.a. $X$ , de taille $n$
$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_f)$	Fonction de vraisemblance
$S_X^n(x)$	Fonction de répartition empirique de $X$ sachant $\{x_1, \dots, x_n\}$

$\mathcal{N}(0, 1)$	Loi normale de moyenne nulle et d'écart-type unitaire
$\Phi(x)$	Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$
$\varphi(x)$	Fonction de densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$
$\Phi_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\rho})$	Fonction de répartition de la loi multinormale d'ordre $n$
$\varphi_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\rho})$	Fonction de densité de probabilité de la loi multinormale d'ordre $n$

### A.3 Modèles de fiabilité *physiques sans système*

$M(\cdot)$	Transformation physique
$G_m(\mathbf{x})$	$m$ -ième fonction de performance ou d'état limite (exprimée dans l'espace des v.a. physiques)
$H_m(\mathbf{u})$	$m$ -ième fonction de performance ou d'état limite (exprimée dans l'espace normé)
$\mathcal{D}_f$	Domaine de défaillance
$\mathcal{D}_s$	Domaine de sûreté
$\Sigma$	Frontière entre les domaines de sûreté et de défaillance
$A_i(t)$	$i$ données d'entrée d'un système mécanique, fonction du temps $t$
$K_j(t)$	$j$ données d'état du système mécanique
$R_l(t)$	$l$ variables identifiant les ressources du système mécanique
$S_k(t)$	$k$ variables identifiant les sollicitations s'exerçant sur le système mécanique
$P_f$	Probabilité de défaillance
$\hat{P}_f$	Valeur estimée de $P_f$
$P_{f_{ref}}$	Probabilité de défaillance de référence
$\beta$	Indice de fiabilité
$\hat{\beta}$	Valeur estimée de $\beta$
$\beta_{ref}$	Indice de fiabilité de référence
$P^*$	Point de conception - Point de défaillance le plus probable
$\mathbf{x}^*$	Coordonnées de $P^*$ dans l'espace physique
$\mathbf{u}^*$	Coordonnées de $P^*$ dans l'espace normé
$\boldsymbol{\alpha}$	Vecteur des cosinus directeurs de la normale à l'état limit en $P^*$

### A.4 Modèles de fiabilité *systèmes sans physique*

$T$	Durée de vie
$F(\cdot)$	Distribution de la durée de vie $T$
$R(t)$	Fonction de fiabilité
$h(t)$	Taux de défaillance instantané, à la date $t$
$\lambda(t)$	Taux de défaillance global, à la date $t$
$w(t)$	Taux d'occurrence des défaillances, à la date $t$ ( <i>ROCOF</i> )
$A(t)$	Fonction de disponibilité
$M(t)$	Fonction de maintenabilité
$\phi(\cdot)$	Fonction de structure

## A.5 Scénarios de défaillance phénoménologiques probabilisés

$\mathbf{X}^{(l)}$	Vecteur des variables aléatoires de niveau $l$
$\boldsymbol{\rho}^{(l)}$	Matrice de corrélation des variables aléatoires de niveau $l$
$X_k^{(l)}$	$k$ -ième variable aléatoire du niveau $l$
$\boldsymbol{\theta}_f^{(l)}$	Vecteur des paramètres de la fonction de densité de probabilité $f_{X_k^{(l)}}(x_k^{(l)})$ d'une v.a. $X_k^{(l)}$
$nva_l$	Nombre de variables aléatoires au niveau $l$
$M_k^{(l)}$	$k$ -ième transformation physique de niveau $l$
$\boldsymbol{\theta}_{M_k^{(l)}}$	Vecteur des paramètres de la transformation physique $M_k^{(l)}$
$S_{k'}^{(l)}$	$k'$ -ième variable aléatoire créée au niveau $l$ par la transformation $M_{k'}^{(l)}$
$Nc_l$	Nombre de nouvelles variables aléatoires créées au niveau $l$
$G_k^{(l)}$	$k$ -ième fonction de performance ou d'état limite de niveau $l$ (exprimée dans l'espace des v.a. physiques)
$H_k^{(l)}$	$k$ -ième fonction de performance ou d'état limite de niveau $l$ (exprimée dans l'espace normé)
$\gamma_k^{(l)}$	Seuil de la $k$ -ième fonction de performance de niveau $l$
$\mathcal{D}_{f_k}^{(l)}$	Domaine de défaillance associé à $G_k^{(l)}$
$\mathcal{D}_{s_k}^{(l)}$	Domaine de sûreté associé à $G_k^{(l)}$
$E_k^{(l)}, \overline{E_k^{(l)}}$	Événement (état) associé au domaine de défaillance $\mathcal{D}_{f_k}^{(l)}$ et son complémentaire associé au domaine de sûreté $\mathcal{D}_{s_k}^{(l)}$
$\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l')}$	Vecteur des v.a. physiques du niveau $l' < l$ , entrées de la transformation $M_k^{(l)}$
$\check{\mathbf{U}}_{k,l}^{(l')}$	Vecteur des v.a. normales centrées, normées, décorréllées issues de la transformation isoprobabilite de $\check{\mathbf{X}}_{k,l}^{(l')}$
$\mathbf{T}^{(l)}$	Transformation isoprobabiliste des variables physiques de niveau $l$ dans l'espace normé
$\check{\mathbf{T}}_{k,l}^{(l')}$	Transformation isoprobabiliste des v.a. physiques du niveau $l' < l$ , entrées du modèle $M_k^{(l)}$ , dans l'espace normé
$\boldsymbol{\alpha}_k^{(l/l')}$	Vecteur des cosinus directeurs de $G_k^{(l)}$ au point de conception $\check{\mathbf{u}}_{k,l}^{(l')*}$
$P_f^{(l)}$	Probabilité de défaillance relative à la fonction d'état limite $G_k^{(l)}$
$\beta_k^{(l)}$	Indice de fiabilité relative à la fonction d'état limite $G_k^{(l)}$

$a_j^{(l')}$	Coefficient $j$ du développement chaos polynomial de la variable $X_k^{(l)}$ par rapport aux variables de niveau $l'$
$\hat{a}_j^{(l')}$	Estimation du coefficient $j$ du développement chaos polynomial tronqué de la variable $X_k^{(l)}$ par rapport aux variables de niveau $l'$
$\check{\xi}_{k,l}^{(l')}$	Vecteur de v.a. normales standard obtenu par transformation isoprobabiliste de $\check{\mathbf{X}}_{k,1}^{(l')}$
$\{\Psi_j\}_{j=0}^{P-1}$	Polynômes d'Hermite multidimensionnel formant un chaos polynomial de taille $P$
$\hat{c}_{G_k^{(l)}}^{(l)}$	Coefficient de normalisation de la densité EPM de la variable $X_k^{(l)}$
$n_{EPM}^{X_k^{(l)}}$	Ordre de la densité EPM de la variable $X_k^{(l)}$
$\hat{a}_{EPM_i}^{X_k^{(l)}}$	Coefficient du polynôme de la densité EPM de la variable $X_k^{(l)}$

## A.6 Abréviations

### A.6.1 Fiabilité & sûreté de fonctionnement

AMDEC	Analyse des Modes de Défaillance et de leur Criticité
APR	Analyse Préliminaire des Risques
BBN	Bayesian Belief Networks
CDF	Cumulative Distribution Function
EPM	Exponential of a Polynomial Method
ETA	Event Tree Analysis
FMECA	Failure Mode Effects and Criticality Analysis
FORM	First-Order Reliability Method
FTA	Fault Tree Analysis
<i>MDT</i>	Mean Down Time
<i>MTBF</i>	Mean Time Between Failure
<i>MTTF</i>	Mean Time To Failure
<i>MUT</i>	Mean Up Time
PDF	Probability Density Function
PHA	Preliminary Hazard Analysis
RAMS	Reliability, Availability, Maintainability and Safety
RBD	Reliability Block Diagram
RGA	Reliability Growth Analysis
<i>ROCOF</i>	Rate of occurrence of failures
SdF	Sûreté de Fonctionnement
SORM	Second-Order Reliability Method
<i>TE</i>	<i>Top Event</i>

**A.6.2 Méthodologie de la conception**

AFB	Analyse Fonctionnelle du Besoin
AFT	Analyse Fonctionnelle Technique
AV	Analyse de la Valeur
FA	Functional Analysis
FAST	Functional Analysis System Technique
QFD	Quality Function Deployment
TRIZ	Theory of inventive problems solving
VA	Value Analysis

**A.6.3 Moteurs**

AN	Angle de Nappe
AV	AVance à l'Injection
BP	Basse Pression
DPC	Distance Piston Culasse
EGR	Exhaust Gas Recirculation
GBR	Gaz brûlés résiduels
HCCI	Homogeneous Charge Compression Ignition
HP	Haute Pression
JdC	Joint de Culasse
NTP	Dépassement d'injecteur
OoR wear	Out-of-Round wear (ovalisation)
RAS	Refroidisseur d'Air Suralimenté

**A.6.4 Divers**

DOE	Design Of Experiments
OoR wear	Out-of-Round wear (ovalisation)
PLEX	Plan d'expériences
QRS	Quadratic Response Surface

## Annexe B

# Modélisations *système sans physique* et *physique sans système* du problème de fiabilité : mesure-t-on la même chose ?

### B.1 Introduction

D'un côté les analyses de fiabilité par le biais d'une modélisation *système sans physique* sont généralement menées dans le cadre d'études plus globales de sûreté de fonctionnement. De l'autre, les analyses de fiabilité reposant sur une interprétation *physique sans système* sont mises en œuvre dans le contexte de la mécanique probabiliste des matériaux et des structures. Ces deux types d'approche sont issus de deux disciplines distinctes mais d'origines identiques. Chacune de ces analyses a pour objectif l'estimation d'une probabilité mesurant l'aptitude d'un dispositif technologique (un composant, un système,...) à assurer ses fonctions dans des conditions données pour une période donnée ou à un instant donné. Nous nous interrogeons ici sur l'équivalence des mesures de fiabilité qu'elles produisent et sur les relations qui les lient.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la définition des principales mesures obtenues à partir d'une représentation *système sans physique* du problème de fiabilité. Dans un second temps, nous examinons celles qui sont évaluées à partir d'une formalisation *physique sans système*. Finalement, nous comparons ces différentes mesures et nous en identifions les principales correspondances.

## B.2 Mesures de fiabilité classiques issues de modèles *systèmes sans physique*

### B.2.1 Introduction

De manière générale, l'objectif des analyses reposant sur une interprétation *système sans physique* du problème de fiabilité consiste à construire la distribution de probabilité du temps à la défaillance  $T$  (durée de vie) ou la fonction de fiabilité  $R(t)$  d'un dispositif donné (un composant, un système,...), desquelles sont ensuite déduites d'autres mesures de fiabilité telles que des probabilités de défaillance, des taux de défaillance, ...

En fait, l'ensemble des informations concernant la conception et les multiples paramètres physiques qui la caractérisent (*e.g.* les paramètres dimensionnant le système, les contraintes de fonctionnement, les sollicitations extérieures) sont combinés et pris en compte de manière implicite au travers de la définition de la distribution probabiliste du temps à la défaillance  $T$  (aussi appelé durée de vie). Les principales données nécessaires à la mise en œuvre de ce type d'analyses de fiabilité sont essentiellement issues de banques de données de fiabilité, du retour d'expérience et des jugements d'experts.

Cette démarche, qui se veut système, est purement statistique et logique. Elle offre aussi bien la possibilité de raisonner, à partir d'interprétations statiques de la fiabilité, exploitant une modélisation structurelle et logique des scénarios de défaillance (*e.g.* blocs diagrammes de fiabilité, arbres des causes de défaillance), qu'à partir d'interprétations dynamiques reposant sur la modélisation de l'espace des états du système considéré et sur l'analyse de la logique des changements d'états (*e.g.* chaînes de Markov). En revanche, elle est dépourvue de considérations visant à exploiter la modélisation du comportement physique des systèmes et de la physique de défaillance. Par conséquent, elle participe principalement à la validation de l'architecture des systèmes mécaniques. Elle fournit des résultats intéressants du point de vue de la conception mais ils restent limités à la détermination de probabilités de défaillance, de taux de changement d'état ou encore à l'estimation de l'influence de la défaillance des composants d'un système sur sa fiabilité globale. Elle ne permet pas l'identification du poids des paramètres de conception (leviers élémentaires dont dispose l'ingénieur) sur la fiabilité du système.

### B.2.2 Fiabilité $R(t)$ et distribution du temps à la défaillance $T$

L'aptitude d'un dispositif (un composant, un système,...) à assurer sa fonction dans des conditions données de fonctionnement  $c_1, c_2, \dots$ , pour une période  $t$  donnée est caractérisée au moyen d'une fonction  $R(t)$  dite de fiabilité. Elle est définie de la manière suivante [Mod93] :

$$R(t) = \Pr(T \geq t | c_1, c_2, \dots) \quad (\text{B.1})$$

La fonction de fiabilité  $R(t)$  traduit donc la probabilité qu'une durée de vie spécifiée  $T$  soit supérieure à une durée de fonctionnement donnée sachant les conditions d'utilisation  $c_1, c_2, \dots$ . Dans la pratique, dans le cadre de la modélisation *système sans physique*

du problème de fiabilité, les conditions de fonctionnement  $c_1, c_2, \dots$ , sont implicitement prises en compte si bien que l'équation B.1 se réduit à :

$$R(t) = \Pr[T \geq t] \quad (\text{B.2})$$

En fait, le temps à la défaillance  $T$  est une variable aléatoire de fonction de répartition  $F(t)$  définie pour  $t \geq 0$  par :

$$F(t) = \Pr[T \leq t] = \int_0^t f(\theta) d\theta \quad (\text{B.3})$$

$F(t)$  désigne ainsi la probabilité de défaillance de l'entité sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Celle-ci est directement reliée à la fonction de fiabilité  $R(t)$  par la relation :

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \int_t^\infty f(\theta) d\theta \quad (\text{B.4})$$

### B.2.3 Taux de défaillance

Dans le cadre de la modélisation *système sans physique* du problème de fiabilité, les multiples processus physiques ou mécanismes potentiellement à l'origine des défaillances d'un dispositif, peuvent aussi être pris en compte à travers la définition d'une fonction appelée taux instantané de défaillance (*hazard rate*) et notée  $h(t)$ . Celui-ci s'interprète comme la probabilité de première défaillance d'un dispositif dans un intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  sachant que le matériel était en bon fonctionnement avant  $t$ . Il est dérivé du taux de défaillance global  $\lambda(t)$  défini par :

$$\lambda(t) = \frac{1}{\Delta t} \Pr[\text{défaillance entre } t \text{ et } t + \Delta t \text{ sachant qu'il n'y pas défaillance sur } [0, t]] \quad (\text{B.5})$$

Autrement dit, le taux de défaillance instantané  $h(t)$  est la limite du taux de défaillance  $\lambda(t)$  quand  $\Delta t \rightarrow 0$ . On a donc :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pr[T \leq t + \Delta t | T \geq t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\Pr[t \leq T \leq t + \Delta t]}{\Pr[T \geq t]} \quad (\text{B.6})$$

En faisant intervenir  $R(t)$  dans l'équation B.6, il vient :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \quad (\text{B.7})$$

De la même manière, en faisant intervenir  $F(t)$  dans B.6, on obtient :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} \quad (\text{B.8})$$

A partir des équations B.7 ou B.8, on déduit une autre expression de  $h(t)$  sous la forme :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{-\frac{d}{dt}R(t)}{R(t)} \quad (\text{B.9})$$



$h(t) dt$  représente ainsi la probabilité conditionnelle que l'entité va connaître la défaillance à un temps compris entre  $t$  et  $t + \Delta t$  sachant qu'elle a fonctionné correctement jusqu'à  $t$ .

Le taux de défaillance  $h(t)$  ne doit pas être confondu avec le *ROCOF* (*rate of occurrence of failures*) qui désigne le taux d'occurrence des défaillances d'une entité réparable [RH04] et qui est défini par :

$$w(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr[N(t, t + \Delta t) = 1]}{\Delta t} \quad (\text{B.10})$$

où  $N(t, t + \Delta t)$  correspond au nombre de défaillances dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ .

Enfin, en supposant que l'entité est totalement fiable au début de son fonctionnement (*i.e.*  $R(0) = 1$ ), l'équation B.9 conduit à l'écriture suivante de la fonction de fiabilité  $R(t)$  :

$$R(t) = \exp \left[ - \int_0^t h(x) dx \right] \quad (\text{B.11})$$

## B.2.4 Fiabilité et sûreté de fonctionnement

Au sens large, la sûreté de fonctionnement est définie comme la *Science des Défaillances* [Vil88] ; elle inclut ainsi leur connaissance, leur évaluation, leur prévision, leur mesure et leur maîtrise. Au sens strict, la sûreté de fonctionnement est l'aptitude d'une entité à satisfaire à une ou plusieurs fonctions requises dans des conditions données. Elle peut être caractérisée par les concepts suivants :

- La fiabilité  $R(t)$ .
- La disponibilité qui est l'aptitude d'un dispositif à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données et à un instant donné. Elle est formellement définie par :

$$A(t) = \Pr[\text{non défaillance à l'instant } t] \quad (\text{B.12})$$

L'indisponibilité est alors donnée par l'expression  $\bar{A}(t) = 1 - A(t)$ . Dans le cas d'une entité irréparable, on a  $A(t) = R(t)$ . Dans le cas général,  $A(t) \geq R(t)$ .

- La maintenabilité qui est l'aptitude d'une entité à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits. Elle est définie formellement par :

$$M(t) = \Pr[\text{réparation sur } [0, t]] \quad (\text{B.13})$$

On a aussi :

$$M(t) = 1 - \Pr[\text{non réparation sur } [0, t]] \quad (\text{B.14})$$

- La sécurité qui est l'aptitude d'une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques.

Les mesures de fiabilité, de disponibilité et de maintenabilité sont complémentaires les unes des autres. A travers le tableau B.1 et la figure B.1, nous explicitons quelques unes des principales mesures supplémentaires qui découlent de ces grandeurs essentielles de sûreté de fonctionnement, à savoir :

Mesure de fiabilité	Définition
Durée moyenne de fonctionnement d'une entité avant la première défaillance, $k = 1$ ( <i>Mean Time To Failure</i> )	$MTTF = - \int_0^\infty t \frac{d}{dt} R_1(t) dt$
Durée moyenne de fonctionnement après la $k$ ème réparation, $k > 1$ ( <i>Mean Up Time</i> )	$MUT_k = - \int_0^\infty t \frac{d}{dt} R_k(t) dt$
Durée moyenne d'indisponibilité après la $k$ ème défaillance, $k > 1$ ( <i>Mean Down Time</i> )	$MDT_k = \int_0^\infty t \frac{d}{dt} M_k(t) dt$
Durée moyenne entre deux défaillances consécutives $k$ et $k + 1$ d'une entité réparable ( <i>Mean Time Between Failure</i> )	$MTBF_k = MUT_k + MDT_k$

TAB. B.1 – Définition des  $MTTF$ ,  $MUT$ ,  $MDT$  et  $MTBF$ .

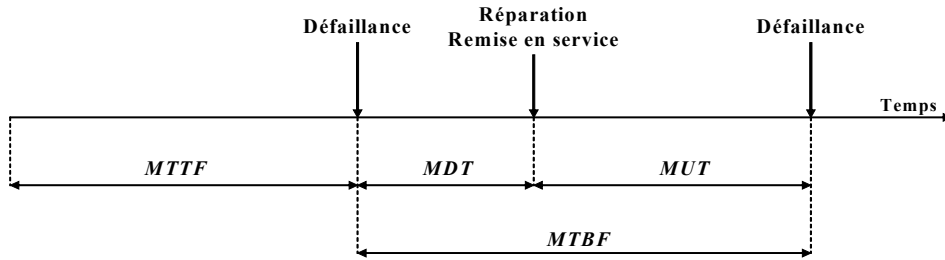


FIG. B.1 – Représentation des  $MTTF$ ,  $MUT$ ,  $MDT$  et  $MTBF$ .

- la durée moyenne de fonctionnement d'une entité avant la première défaillance,  $k = 1$  (*Mean Time To Failure* -  $MTTF$ ),
- la durée moyenne d'indisponibilité après la  $k$ ème défaillance,  $k \geq 1$  (*Mean Down Time* -  $MDT$ ),
- la durée moyenne de fonctionnement après la  $k$ ème réparation,  $k \geq 1$  (*Mean Up Time* -  $MUT$ ),
- la durée moyenne entre deux défaillances consécutives d'une entité réparable (*Mean Time Between Failure* -  $MTBF$ ).

Il existe d'autres mesures de fiabilité et de sûreté de fonctionnement issues de l'évaluation de modèles *systèmes sans physique* que nous ne rappelons pas ici. En particulier, nous citons, sans les détailler, les mesures d'importance des composants d'un système, qui caractérisent l'influence de leur défaillance ou de leur fiabilité sur la fiabilité globale du système (*e.g.* mesures de Birnbaum, mesures de Fussel-Vesely [MKK99]).

## B.3 Mesures de fiabilité classiques issues de modèles *physiques sans système*

### B.3.1 Introduction

Les analyses reposant essentiellement sur une interprétation *physique sans système* du problème de fiabilité, plus connues sous le nom d’approches mécano-fiabilistes [Lem05b] sont développées dans le cadre de la mécanique probabiliste des matériaux et des structures. Bien que construites sur les mêmes bases que les approches précédentes (c’est-à-dire à partir de la définition générique et classique de la fiabilité), elles s’en distinguent sensiblement, tant par la formulation du problème de fiabilité que par les méthodes de calcul et les produits qui en émanent.

Elles considèrent qu’un système mécanique est d’abord conçu, puis évolue, dans un contexte incertain : l’environnement du système comme sa fabrication ne sont jamais parfaitement connus. Soumis à un champ d’action d’origines diverses, il répond en fonction de sa géométrie, des caractéristiques de résistance de ses matériaux constitutifs, des interactions entre les différents éléments qui le composent,... Cette réponse est jugée acceptable si elle satisfait à une série d’exigences ou de règles de performance et qu’elle traduit une configuration non défaillante du système.

Les approches fiabilistes par modélisation physique visent ainsi à identifier la réponse “incertaine” du système et à estimer son aptitude à évoluer dans un domaine de performances acceptables. Elles reposent sur :

1. la modélisation du comportement phénoménologique du système mécanique au moyen d’outils de simulation numérique plus ou moins complexes.
2. la prise en compte explicite des paramètres de conception (ou d’environnement) et des incertitudes relatives à leur caractérisation par le biais d’une modélisation probabiliste.
3. la définition de domaines de performances acceptables et de domaines de défaillance au moyen de fonctions d’état limite issues de l’expérience et de la connaissance des phénomènes impliqués dans la physique de défaillance.

La problématique générale ne consiste donc plus à déterminer la distribution de probabilité de la durée de vie  $T$  par l’exploitation d’une simple analyse statistique de données de défaillance. A partir de la donnée des modèles de comportements physiques, de la définition du modèle probabiliste des données d’entrée (paramètres de conception et d’environnement), de la définition de critères de performance ou d’état limite, et de la mise en œuvre de méthodes de calcul probabiliste (Annexe E), il s’agit d’estimer des mesures de la fiabilité telles que des probabilités de défaillance instantanées ou cumulées, des indices de fiabilité, des taux de franchissement d’un état non défaillant à un état défaillant,...

### B.3.2 Notion d’état limite et de fonction de performance

Soit  $\mathbf{X}(t, \omega) = (X_1(t, \omega), \dots, X_n(t, \omega))^T$ , le vecteur composé de l’ensemble des variables aléatoires intervenant dans la modélisation du comportement mécanique et physique du dispositif étudié et de son environnement.  $t$  représente sa dépendance au

temps et  $\omega$  à l'aléa. Soit  $M(\mathbf{X}(t, \omega))$  la réponse mécanique ou physique (aléatoire) de celui-ci. Pour chacun des modes de défaillance potentiels du dispositif ou pour chaque critère de performance, une fonction d'état limite  $G(\mathbf{X}(t, \omega), M(\mathbf{X}(t, \omega)))$  est définie dans l'espace des paramètres. Elle permet de définir, un domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f(t)$  (correspondant aux états de performances dégradées ou défaillants du système), un domaine de sûreté  $\mathcal{D}_s(t)$  (correspondant aux états de performances acceptables ou non défaillants du système) et une surface d'état limite  $\Sigma(t)$ . Par convention, ils s'écrivent :

$$\mathcal{D}_f(t) = \{\mathbf{X}(t, \omega); G(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) \leq 0\} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathcal{D}_s(t) = \{\mathbf{X}(t, \omega); G(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) > 0\} \quad (\text{B.16})$$

$$\Sigma(t) = \{\mathbf{X}(t, \omega); G(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) = 0\} \quad (\text{B.17})$$

### B.3.3 Probabilité de défaillance instantanée

La probabilité de défaillance instantanée représente la probabilité que le dispositif soit défaillant à l'instant  $t$ . Elle est donc définie par :

$$P_{f,i}(t) = \Pr[G(t, \mathbf{x}(t, \omega)) \leq 0], \quad t = t_1 \text{ fixé} \quad (\text{B.18})$$

De manière formelle, l'expression générale de la probabilité de défaillance  $P_{f,i}(t_1)$  est alors donnée par :

$$P_{f,i}(t_1) = \Pr[G(t_1, \mathbf{x}(t_1, \omega)) \leq 0] = \int_{\mathcal{D}_f(t_1)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{B.19})$$

où  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est la densité de probabilité conjointe de  $\mathbf{X}(t_1, \omega)$ . L'intégrale multiple donnant la probabilité  $P_{f,i}(t_1)$  dans la relation E.4 n'est généralement pas simple à calculer de manière exacte. Des méthodes de calcul efficaces, en assurant une bonne approximation, sont présentées en annexe E.

### B.3.4 Probabilité de défaillance cumulée

De fait, la probabilité de défaillance instantanée  $P_{f,i}(t_1)$  n'est pas conditionnée aux instants  $t$  précédents. Autrement dit, elle ne prend pas en compte l'histoire du fonctionnement et du comportement (défaillant ou non) du dispositif antérieure à la date  $t$ . Pour cela, il est nécessaire de mesurer la probabilité de défaillance sur un intervalle de temps donné  $[t_1, t_2]$ . Elle est obtenue à partir de la détermination de la probabilité de l'événement : il existe une date  $\tau$  appartenant à l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ , pour laquelle la structure est défaillante. Cette probabilité de défaillance dite cumulée est donc définie par :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) = \Pr[\exists \tau \in [t_1, t_2] / G(\tau, \mathbf{x}(\tau, \omega)) \leq 0] \quad (\text{B.20})$$

Si  $t_1 = 0$  et  $t_2 = t$ , la probabilité cumulée  $P_{f,c}(0, t)$  mesure la probabilité de défaillance sur l'intervalle  $[0, t]$ . Le calcul de  $P_{f,c}(t_1, t_2)$  est encore moins aisé que celui de la probabilité instantanée  $P_{f,i}(t)$ . Les principales techniques de calcul sont présentées et comparées de manière complète dans [AR02]. Nous ne les rappelons pas ici.

Connaissant la probabilité de défaillance cumulée  $P_{f,c}(0, t)$ , la fiabilité sur l'intervalle  $[0, t]$  est alors donnée par :

$$1 - P_{f,c}(0, t) = \Pr[G(\tau, \mathbf{x}(\tau, \omega)) > 0], \quad \forall \tau \in [0, t] \quad (\text{B.21})$$

La durée de vie  $T$  est ainsi définie comme le temps le plus court jusqu'à ce que  $G(\tau, \mathbf{x}(\tau, \omega)) \leq 0$ , ce qui correspond à :

$$T = \min\{\tau, G(\tau, \mathbf{x}(\tau, \omega)) \leq 0\} \quad (\text{B.22})$$

Finalement, nous retrouvons une définition équivalente de la fonction  $R(t)$  définie dans le cadre d'une interprétation *système sans physique* par la relation B.1 :

$$R(t) = \Pr\left[T = \min_{\tau} \{G(\tau, \mathbf{x}(\tau, \omega)) \leq 0\} \geq t\right] = \Pr[T \geq t] \quad (\text{B.23})$$

Pour des raisons pratiques, on cherche généralement à obtenir une approximation de  $P_{f,c}(t_1, t_2)$ . On montre [AR02] que cette probabilité cumulée de défaillance est encadrée par :

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} [P_{f,c}(t_1, t_2)] \leq P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + \mathbf{E}[N^+(t_1, t_2)] \quad (\text{B.24})$$

où  $P_{f,i}(t_1)$  représente la probabilité instantanée à la date  $t_1$ .  $N^+(t_1, t_2)$  est le nombre de franchissements du domaine de sûreté  $\mathcal{D}_s$  vers le domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f$  sur l'intervalle de temps considéré  $[t_1, t_2]$ .  $t_{1+}$  est défini par  $t_{1+} = t_1 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il n'y donc jamais défaillance si on est dans le domaine de sûreté  $\mathcal{D}_s$  à l'instant de départ  $t_1$  et si il n'y a aucun passage dans le domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f$  sur l'intervalle de temps considéré  $[t_1, t_2]$ .

### B.3.5 Franchissements et taux de franchissements

Soit  $\mathbf{X}(t, \omega)$  le vecteur des variables d'entrée,  $t$  le temps et  $\omega$  l'aléa. L'événement :

$$\{\exists \tau \in [t_1, t_2] / G(\tau, \mathbf{x}(\tau, \omega)) \leq 0\} \quad (\text{B.25})$$

traduit un franchissement de l'état limite vers le domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f$ . En particulier, nous cherchons ici les franchissements sortant du domaine de sûreté. Autrement dit, nous cherchons l'instant où la fonction d'état limite passe d'une valeur positive (appartenant au domaine de sûreté  $\mathcal{D}_s$ ) à une valeur négative ou nulle (appartenant au domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f$  ou à la frontière  $\Sigma$ ). Le taux de franchissements sortant de  $\mathcal{D}_s$ , noté  $\nu(t)$ , est lié au nombre de franchissements sortant  $N^+(t, t + \Delta t)$  sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$  par la relation :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr[N^+(t, t + \Delta t) = 1]}{\Delta t} \quad (\text{B.26})$$

Une autre définition du taux global de franchissements sortant [DM96] peut être donnée sous la forme :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pr(\{\mathbf{X}(t, \omega) \in \mathcal{D}_s(t)\} \cap \{\mathbf{X}(t + \Delta t, \omega) \in \mathcal{D}_f(t + \Delta t)\}) \quad (\text{B.27})$$

Le nombre moyen de franchissements sur  $[t_1, t_2]$  est alors obtenu par :

$$\mathbf{E} [N^+ (t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \nu (t) dt \quad (\text{B.28})$$

En fiabilité, on s'intéresse en particulier au premier franchissement  $N_1^+ (t_1, t_2)$  et donc au nombre moyen de premier franchissement  $\mathbf{E} [N_1^+ (t_1, t_2)]$  sur  $[t_1, t_2]$  :

$$\mathbf{E} [N_1^+ (t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \nu_1 (t) dt \quad (\text{B.29})$$

où  $\nu_1 (t)$  est le taux de premier franchissement. En effet, il permet de déterminer la probabilité cumulée de première défaillance définie par :

$$P_{f,c} (t_1, t_2) = P_{f,i} (t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \nu_1 (t) dt \quad (\text{B.30})$$

Il existe d'autres mesures de fiabilité issues d'une formalisation *physique sans système* du problème de fiabilité. Nous ne les rappelons pas ici car elles n'apportent pas d'éléments de réponse cruciaux à la question posée dans cette annexe : modélisations *système sans physique* et *physique sans système* du problème de fiabilité : mesure-t-on la même chose ? En revanche, elle font l'objet d'une présentation détaillée dans l'annexe E.

## B.4 Synthèse – Analogies des différentes mesures

Maintenant que l'on a défini les principales mesures de la fiabilité estimées dans le cadre des modélisations *système sans physique* et *physique sans système* du problème de fiabilité, nous nous proposons d'identifier les correspondances et les relations possibles entre ces différentes mesures.

Tout d'abord, il est important de souligner que, bien que la formulation du problème de fiabilité soit à l'origine différente, la définition de la fonction de fiabilité  $R(t)$  est bien équivalente dans les deux cas (Eq. B.2 et B.23).

Au vu des définitions précédentes, il apparaît que la probabilité de défaillance instantanée  $P_{f,i}(t)$ , évaluée dans le cadre d'une interprétation *physique sans système* du problème de fiabilité, correspond à la mesure d'indisponibilité  $\bar{A}(t)$  mesurée dans le contexte d'analyses de sûreté de fonctionnement et d'une représentation *système sans physique*. Ceci constitue une première analogie.

Si l'on regarde maintenant les équations B.3 et B.20 de plus près, on s'aperçoit aussi que  $F(t)$  comme  $P_{f,c}(0, t)$  mesurent la probabilité de défaillance du dispositif sur l'intervalle  $[0, t]$ . Il y a donc ici une première équivalence : la probabilité de défaillance cumulée de la formalisation *physique sans système* du problème de fiabilité correspond à la fonction de défaillance identifiée dans le cadre d'une représentation *système sans physique*.

Une deuxième équivalence est observée au niveau du *ROCOF*  $w(t)$  et du taux de franchissement  $\nu(t)$ .

Enfin, il est possible d'établir une analogie entre le taux de premier franchissement  $\nu_1(t)$  et le taux de défaillance instantané  $h(t)$ . En effet, en reprenant l'expression de  $h(t)$  définie dans l'équation B.8 et en exploitant le fait que  $F(t) = P_{f,c}(0, t)$ , il vient d'abord :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P_{f,c}(0, t + \Delta t) - P_{f,c}(0, t)}{1 - P_{f,c}(0, t)} \quad (\text{B.31})$$

Ensuite, en remplaçant  $P_{f,c}(0, t)$  par  $P_{f,i}(t_1) + \int_0^t \nu_1(x) dx$  (Eq. B.30), on a :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t+\Delta t} \nu_1(x) dx - \int_0^t \nu_1(x) dx}{\Delta t} \times \frac{1}{1 - P_{f,c}(0, t)} \quad (\text{B.32})$$

où  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t+\Delta t} \nu_1(x) dx - \int_0^t \nu_1(x) dx}{\Delta t} = \nu_1(t)$ . Finalement, on obtient :

$$h(t) = \frac{\nu_1(t)}{1 - P_{f,c}(0, t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (\text{B.33})$$

Nous retrouvons aussi cette relation en partant de la définition du taux de franchissements  $\nu(t)$  (Eq. B.27). En effet, on remarque que l'équation B.27 peut se traduire de la manière suivante :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pr[\text{non défaillance à } t \text{ et défaillance à } t + \Delta t] \quad (\text{B.34})$$

ce qui donne pour le taux de premier franchissement :

$$\nu_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pr[\text{non défaillance sur } [0, t] \text{ et défaillance à } t + \Delta t] \quad (\text{B.35})$$

$$\nu_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pr[\text{défaillance à } t + \Delta t | \text{non défaillance à } [0, t]] \times \dots$$

$$\Pr[\text{non défaillance à } [0, t]]$$

d'où d'après l'équation B.20 :

$$\nu_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pr[\text{défaillance à } t + \Delta t | \text{non défaillance à } [0, t]] \times (1 - P_{f,c}(0, t)) \quad (\text{B.36})$$

et finalement d'après B.6 :

$$\nu_1(t) = h(t) \times (1 - P_{f,c}(0, t)) \quad (\text{B.37})$$

Nous sommes donc en mesure d'établir plusieurs équivalences et analogies entre les mesures de fiabilité issues des modélisations *système sans physique* et *physique sans système*. Elles sont synthétisées dans le tableau B.2.

Mesure de fiabilité	Fiabilité système sans physique	Fiabilité physique sans système
Fonction de fiabilité $R(t)$	$\Pr [T \geq t]$	$\Pr [T \geq t]$ $\min_{\tau} \{G(\tau, \mathbf{x}(\tau, \omega)) \leq 0\}$
Probabilité de défaillance sur un intervalle $[0, t]$	$F(t)$	$P_{f,c}(0, t)$
Disponibilité et probabilité de défaillance instantanée	$\bar{A}(t) = 1 - A(t)$	$P_{f,i}(t)$
Taux de défaillance instantané et taux de premier franchissement	$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(1)}$	$h(t) = \frac{\nu_1(t)}{1 - P_{f,c}(0, t)}$
<i>ROCOF</i> et taux de franchissements global	$w(t)$	$\nu(t)$

TAB. B.2 – Analogies des mesures de fiabilité issues des modélisations *système sans physique* et *physique sans système*.

## B.5 Conclusion

Les analyses de fiabilité par formalisation *système sans physique* mises en œuvre dans le cadre d'études plus globales de sûreté de fonctionnement et les analyses de fiabilité par interprétation *physique sans système* menées dans le contexte de la mécanique probabiliste des matériaux et des structures sont issues de deux disciplines distinctes mais d'origines identiques. Dans les deux cas, les résultats de ces études conduisent à l'estimation d'une probabilité mesurant l'aptitude d'un dispositif technologique (un composant, un système,...) à assurer sa fonction dans des conditions données pour une période donnée ou à une période donnée. Cependant, la formulation du problème de fiabilité et sa résolution sont sensiblement différentes d'un contexte à l'autre. Aussi, il est important de bien connaître la signification des mesures de fiabilité qui en résultent. En conséquence, nous avons explicité et précisé les équivalences et les analogies que l'on peut dégager entre les principales mesures de fiabilité issues des modélisations *système sans physique* et *physique sans système*.



## Annexe C

# Approximation de variables aléatoires quelconques

### C.1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette annexe au calcul des propriétés statistiques et à l'identification de la fonction de densité de probabilité  $f_Y(y)$  ou de la fonction de distribution de probabilité  $F_Y(y)$  d'une variable aléatoire quelconque  $Y$  résultant d'une transformation  $M(.)$  de variables aléatoires  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ . La transformation  $M(.)$  renvoie aux modèles de comportement (analytique, numérique, éléments finis, expert, heuristique) issus de la modélisation des phénomènes impliqués dans des scénarios de défaillance phénoménologiques de systèmes mécaniques (chapitres 5 et 6). Outre le fait que ce problème n'ait pas de solution générale (ce qui implique l'existence de plusieurs méthodes susceptibles d'y répondre), des obstacles supplémentaires, imposés par les spécificités de l'approche que nous développons, doivent également être pris en compte. On distingue, en particulier :

- la taille du modèle fiabiliste global, c'est-à-dire le nombre de variables aléatoires élémentaires, le nombre de niveaux et le nombre des transformations physiques intermédiaires caractérisant les scénarios de défaillance phénoménologiques que nous étudions.
- la complexité potentielle des transformations nodales. Par exemple, la résolution d'un problème aux éléments finis est beaucoup plus gourmande en temps de calcul que l'évaluation de la solution d'une équation analytique.
- l'utilisation des variables aléatoires approximées à un niveau ( $l$ ) pour la caractérisation de variables aléatoires à des niveaux supérieurs.
- l'utilisation des variables aléatoires approximées aux différents niveaux du modèle global pour l'estimation de mesures de fiabilité et pour la détermination de mesures d'importance.

Autrement dit, il est indispensable d'avoir recours à des méthodes assurant un très bon compromis entre économie en terme d'appels aux différents codes de calcul (afin de limiter au maximum le temps nécessaire à l'évaluation du modèle de fiabilité) et précision de l'approximation.

Nous donnons les principes de quelques unes des méthodes qui se distinguent des autres au sein de l'état de l'art, à savoir :

- l'identification exacte de la fonction de densité de probabilité (dans certains cas particuliers),
- la simulation de Monte-Carlo,
- l'approximation de la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire à partir de la connaissance de ses moments statistiques au moyen :
  - de la famille de distributions de Pearson.
  - de la famille de distributions de Johnson.
  - des séries Gram-Charlier.
  - d'une exponentielle d'un polynôme.
  - de la transformation de Winterstein.
- l'approximation de la fonction de densité de probabilité par des  $B$ -splines et une technique d'estimation bayésienne de leurs paramètres.
- le développement de la variable aléatoire sur une base fonctionnelle particulière : le chaos polynomial.

Sur la base de l'expérience disponible dans la littérature, nous effectuons une synthèse de leurs avantages et inconvénients. Il en existe d'autres que nous ne rappelons pas car elles ne sont pas directement applicables dans le contexte de nos études ou moins performantes que l'une des approches précédemment citées. Nous pensons par exemple à la méthode des séries de Edgeworth présentée dans [SO83] ou encore aux méthodes reposant sur l'étude des fonctions caractéristiques des variables aléatoires [Joh49, SO83].

## C.2 Identification exacte de la loi

L'identification exacte de loi de probabilité d'une variable aléatoire résultant d'une transformation quelconque est malheureusement impossible dans la plupart des cas. Cependant lorsque les combinaisons des variables sont simples (combinaisons linéaires de variables aléatoires Gaussiennes, produit ou quotient de variables aléatoires lognormales, ...), c'est la solution qu'il est nécessaire de privilégier.

## C.3 Simulation de Monte Carlo

L'approximation et le tracé de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  peut se faire par simulation de Monte Carlo. L'approche consiste à :

1. considérer un nombre  $n$  de réalisations  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de la variable aléatoire  $X$ ,
2. regrouper les observations proches (qui appartiennent à un même intervalle de taille préalablement définie).
3. construire un histogramme permettant une représentation de la fonction de densité de la variable  $X$ .
4. estimer les propriétés statistiques de la variable  $X$  (moyenne, écart-type, asymétrie, aplatissement,...).

Pour la construction de l'histogramme, on se donne habituellement les bornes inférieure  $a_0 < \min(\{x^{[1]}, \dots, x^{[n]}\})$  et supérieure  $a_k > \max(\{x^{[1]}, \dots, x^{[n]}\})$  de l'échantillon  $\{x^{[1]}, \dots, x^{[n]}\}$ ; puis on partitionne l'intervalle  $]a_0, a_k]$  en  $k$  intervalles ou classes  $]a_{i-1}, a_i]$  généralement de même largeur  $\Delta_i = a_i - a_{i-1} = \frac{a_k - a_0}{k}$ . Le nombre d'observations  $n_i$  appartenant à la classe  $i$  constitue l'effectif de cette classe. La fréquence de la classe  $i$  est donnée par  $n_i/n$ . L'histogramme est ainsi la figure constituée des rectangles dont les bases sont les classes et dont les hauteurs sont données par  $\frac{n_i}{n\Delta_i}$ .

Il existe d'autres méthodes moins classiques pour obtenir l'histogramme représentant la fonction de densité d'une variable aléatoire  $X$  à partir de la donnée d'un échantillon  $\{x^{[1]}, \dots, x^{[n]}\}$  de ses réalisations (*e.g.* [Yu03]); nous ne les rappelons pas ici.

Cette méthode de simulation de Monte Carlo est bien entendu généralisable et permet l'identification de la réponse aléatoire  $Y$  d'une fonction de transfert numérique (caractérisant le comportement physique d'un système mécanique par exemple) comportant plusieurs entrées aléatoires  $\{X_1, \dots, X_k\}$ . Les configurations  $\{\mathbf{X}^{[1]}, \dots, \mathbf{X}^{[n]}\}$  du vecteur  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$  des données d'entrée de la fonction de transfert, nécessaires à la simulation, sont construites à partir de la donnée d'échantillons aléatoires initialement identifiés pour chaque variable aléatoire d'entrée  $X_k$ . Les réalisations correspondantes de la réponse du modèle de comportement, notées  $\{Y^{[1]}, \dots, Y^{[n]}\}$ , sont analysées pour assurer l'estimation de ses propriétés statistiques (moyenne, écart-type, asymétrie, aplatissement,...) et le tracé de l'histogramme.

La méthode de simulation de Monte Carlo, simple à mettre en œuvre, est en revanche reconnue pour être très coûteuse en nombre d'appels au modèle de calcul et ne fournit pas une expression analytique de la fonction de densité ou de la fonction de distribution de la variable aléatoire.

## C.4 Méthode *FORM*

La densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  peut être déterminée point par point par réalisations successives d'analyses *FORM* (Annexe E). Il s'agit en fait de conduire une analyse de sensibilité de la variable  $X$  au paramètre  $\lambda$  de la fonction d'état limite :

$$G(\lambda, x) = \lambda - x$$

La probabilité associée à l'occurrence de l'événement  $\{\lambda \leq x\}$  s'écrit :

$$P_f(\lambda) = \Pr[\lambda \leq x] = 1 - F_X(\lambda) \quad (\text{C.1})$$

avec  $F_X(x)$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ . Dans le contexte d'une analyse *FORM*, une approximation de  $P_f(\lambda)$  est donnée par :

$$P_f(\lambda) \approx \Phi(-\beta(\lambda)) \quad (\text{C.2})$$

En dérivant les équations C.1 et C.2 par rapport à  $\lambda$ , il vient :

$$\frac{dF_X}{d\lambda} = -\frac{dP_f}{d\lambda} \approx -\varphi(\beta(\lambda)) \frac{d\beta}{d\lambda} \quad (\text{C.3})$$

La densité de probabilité  $f_X(x)$  de la variable aléatoire  $X$  est classiquement définie à partir de  $F_X(x)$  par :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (\text{C.4})$$

d'où en reprenant C.3 :

$$f_X(\lambda) = -\frac{dP_f}{d\lambda} \approx \varphi(\beta(\lambda)) \frac{d\beta}{d\lambda} \quad (\text{C.5})$$

$\beta(\lambda)$  et  $d\beta/d\lambda$  sont déterminés au cours de l'analyse *FORM* correspondante : il est donc possible de reconstruire la fonction de densité  $f_X(x)$  d'une variable  $X$  à partir d'une étude de sensibilité au paramètre  $\lambda$  par le biais d'analyses *FORM* successives.

La généralisation de cette approche à une variable aléatoire  $Y = M(\mathbf{X})$  résultant d'une combinaison  $M(\cdot)$  de variables aléatoires  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  revient simplement à considérer l'état-limite  $G(\lambda, \mathbf{X}) = \lambda - M(\mathbf{X})$  et à se laisser guider par les mêmes étapes que celles énoncées précédemment. L'inconvénient de cette approche réside dans le fait que nous obtenons cette densité point par point. Nous ne disposons donc pas d'une expression analytique de la fonction de densité ou de la fonction de distribution de la variable aléatoire que nous cherchons à caractériser.

## C.5 Méthodes de moments

Nous ne détaillons pas ici l'ensemble des différentes approches disponibles. Nous nous limitons aux plus usitées dans la littérature et donc aux plus performantes. Nous précisons également que l'on suppose la connaissance des premiers moments de la variable aléatoire acquise. Que ce soit pour une variable aléatoire simple ou issue d'une transformation particulière de variables aléatoires, ils peuvent être estimés à partir d'observations disponibles ou bien calculés directement par simulation de Monte-Carlo, par quadrature de Gauss [AS70] moins coûteuses ou tout autre schéma d'intégration numérique plus économique tel que les cubatures de Smolyak [Smo63].

### C.5.1 Famille des distributions de Pearson

Pearson et *al.* proposent une méthode permettant de définir de manière approchée la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $Y$  à partir de la connaissance de ses quatre premiers moments [PH54, PT65]. Ils considèrent qu'un nombre important de distributions de probabilité,  $f_Y(y)$ , satisfont à l'équation différentielle :

$$\frac{df_Y(y)}{dy} = \frac{(y-a)f_Y(y)}{b_0 + b_1y + b_2y^2} \quad (\text{C.6})$$

où  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ , et  $b_2$  sont des constantes déterminées à partir des quatre premiers moments non centrés de  $Y$  et de la relation de récurrence dérivée de l'équation C.6 :

$$nb_0\mu'_{n-1} + [(n+1)b_1 - a]\mu'_n + [(n+2)b_2 + 1]\mu'_{n+1} = 0 \quad (\text{C.7})$$

où  $\mu'_n = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f_Y(y) dy$  désigne le moment non centré d'ordre  $n$  de la variable  $Y$ .

L'équation différentielle C.6 définit une famille de densité de probabilité appelée famille de distributions de Pearson. Celle-ci est illustrée dans le tableau C.1 où les constantes  $y_0$ ,  $a_0$ ,  $m$ ,  $m_1$  et  $m_2$  sont propres à chaque densité et sont définies à partir de la connaissance des premiers moments de la variable aléatoire  $Y$ .

Type	Fonction de densité
I	$f_Y(y) = y_0 y^{m_1} \left(1 - \frac{y}{a_0}\right)^{m_2}$
II	$f_Y(y) = y_0 \left(1 - \frac{y^2}{a_0^2}\right)^m$
III	$f_Y(y) = y_0 y^m e^{-y/a}$
IV	$f_Y(y) = y_0 \left(1 + \frac{y^2}{a_0^2}\right)^{-m} e^{-b \arctan(y/a_0)}$
V	$f_Y(y) = y_0 y^{-m} e^{-a_0/y}$
IV	$f_Y(y) = y_0 y^{m_2} \left(1 + \frac{y}{a_0}\right)^{-m_1}$
VII	$f_Y(y) = y_0 \left(1 + \frac{y^2}{a_0^2}\right)^{-m}$

TAB. C.1 – Famille des distributions de Pearson.

Pour une variable aléatoire quelconque  $Y$  dont on souhaite obtenir une approximation analytique de la densité  $f_Y(y)$ , le choix du type de densité est piloté par un certain nombre de critères dépendants des valeurs de ses premiers moments. Un exposé détaillé, de l'obtention de cette famille de densité de Pearson et du choix du type de distribution à utiliser pour un problème donné, est présenté dans [SO83] ainsi que dans [Bal98].

La méthode de la famille des distributions de Pearson permet donc d'approximer, simplement et de manière analytique, la fonction de densité d'une variable aléatoire  $Y$ , sans aucun *a priori* sur sa forme, à partir de la seule connaissance des premiers moments de  $Y$ . Elle a récemment fait l'objet d'une exploitation dans le cadre du développement d'une méthode alternative à *FORM/SORM* (Annexe E) pour l'analyse de fiabilité et la détermination de probabilité de défaillance de structures mécaniques [ZO01, XC03, ZO04]. Cependant, d'une manière pratique et lorsque les moments ne sont accessibles qu'au travers d'une information limitée, nous remarquons que le manque de précision relatif à leur estimation peut rapidement nous faire passer d'un type de fonction de densité de probabilité à un autre. De plus, dans [Bal98], on soulève aussi le problème de la manipulation de la famille de distributions de type IV (Tab. C.1).

### C.5.2 Famille des distributions de Johnson

Les travaux de Johnson [Joh49], explicités en détail dans [SO83], s'attachent à construire une famille de distributions susceptibles de couvrir un large domaine de variables aléatoires. Ils reposent sur l'hypothèse que l'on peut exprimer une variable aléatoire normale  $\xi$  de la manière suivante :

$$\xi = \gamma + \delta g\left(\frac{x - \mu}{\lambda}\right) \quad (\text{C.8})$$

où  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  et  $\gamma$  sont des paramètres à définir et  $|g|$  est une fonction monotone croissante. L'équation C.8 peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\xi - \gamma}{\delta} = g\left(\frac{x - \mu}{\lambda}\right) \quad (\text{C.9})$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\gamma$  apparaissent alors comme des paramètres de position et les paramètres  $\delta$  et  $\lambda$  comme des paramètres d'échelle. Si on pose :

$$y = \frac{x - \mu}{\lambda} \quad (\text{C.10})$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y$  est alors donnée, de manière générale, par :

$$dF_Y(y) = \varphi(\xi) \left| \frac{d\xi}{dy} \right| dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\gamma + \delta g(y))^2\right] \delta g'(y) dy \quad (\text{C.11})$$

où  $\varphi$  est la fonction de densité normale standard.

De nombreux types de distributions peuvent être ainsi définis à partir de la donnée d'une fonction  $g$  spécifique. Nous nous limitons ici au rappel des distributions lognormale  $S_L$ , à support borné  $S_B$  et à support infini  $S_U$  car elles couvrent le même domaine que le système de fonctions de densité de Pearson présenté dans la section précédente.

### Distribution lognormale $S_L$

La distribution  $S_L$  est définie au moyen de la fonction  $g(y)$  donnée par :

$$g(y) = \ln y. \quad (\text{C.12})$$

Ceci amène à définir la densité de probabilité  $f_Y(y)$  de  $Y$  à l'aide de la relation C.11 par :

$$f_Y(y) = \frac{\delta}{y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\gamma + \delta \ln y)^2\right], \quad y \in ]0, \infty[ \quad (\text{C.13})$$

Les paramètres  $\delta$  et  $\gamma$  sont liés au moment d'ordre  $k$  de  $Y$  par la relation [SO83] :

$$\mu'_k = \int_0^\infty y^k f_Y(y) dy = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{k^2}{\delta^2} - \frac{k\gamma}{\delta}\right). \quad (\text{C.14})$$

La connaissance des premiers moments statistiques de la variable dont on souhaite approximer la fonction de densité de probabilité assure la détermination des paramètres  $\delta$  et  $\gamma$  au moyen de relations issues de l'équation C.14. Celles-ci sont explicitées et démontrées, par exemple, dans [SO83, Bal98].

### Distribution à support borné $S_B$

La distribution  $S_B$  est définie au moyen de la fonction  $g(y)$  donnée par :

$$g(y) = \ln \frac{y}{1-y} \quad (\text{C.15})$$

Ceci amène à la définition de la densité de probabilité  $f_Y(y)$  de  $Y$  suivante :

$$f_Y(y) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y(1-y)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \gamma + \delta \ln \frac{y}{1-y} \right)^2 \right], \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{C.16})$$

La détermination des constantes  $\gamma$  et  $\delta$  à partir des premiers moments de la variable, non exposée ici, est détaillée dans [Dra51, SO83].

### Distribution à support infini $S_U$

La distribution  $S_U$  est définie au moyen de la fonction  $g(y)$  donnée par :

$$g(y) = \sinh^{-1}(y) = \ln \left( y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \quad (\text{C.17})$$

La densité de probabilité  $f_Y(y)$  de  $Y$  est donnée, dans ce cas, par :

$$f_Y(y) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \gamma + \delta \ln \left( y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \right)^2 \right], \quad y \in ]-\infty, \infty[ \quad (\text{C.18})$$

Les premiers moments statistiques s'expriment en fonction des paramètres  $\gamma$  et  $\delta$  au travers des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= -\omega \sinh \Omega \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(\omega^2 - 1)(\omega^2 \cosh 2\Omega + 1) \\ \mu_3 &= -\frac{1}{4}\omega^2(\omega^2 - 1)^2 (\omega^2 (\omega^2 + 2) \sin 3\Omega + 3 \sinh \Omega) \\ \mu_4 &= \frac{1}{8}(\omega^2 - 1)^2 \omega^4 (\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3) \cosh 4\Omega + 4\omega^4(\omega^2 + 2) \cosh 2\Omega + 3(2\omega^2 + 1) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

où,  $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mathbf{E}[Y])^k f_Y(y) dy$  désigne le moment non centré d'ordre  $k$  de la variable  $Y$ ,  $\omega = \exp(\delta^2/2)$  et  $\Omega = \gamma/\delta$ . Ainsi, la connaissance des moments statistiques qui assure la détermination des paramètres  $\gamma$  et  $\delta$  permet la caractérisation complète de la fonction de densité de probabilité donnée dans l'équation C.18.

La méthode de la famille de distributions de Johnson permet donc d'approximer la fonction de densité d'une variable aléatoire  $X$  sans aucune information *a priori* sur la forme de la fonction. La mise en œuvre de cette méthode est plus simple que celle de la méthode de la famille de distributions de Pearson. En revanche, on s'accorde pour dire, qu'en général, cette méthode donne toujours des résultats moins fins que ceux obtenus par une approche par famille de distributions de Pearson (*e.g.* [Bal98, SO83]).

### C.5.3 Séries de Gram-Charlier

Dans cette méthode, intégralement décrite dans [SO83], il s'agit d'approcher la distribution  $F_Y(y)$  d'une variable aléatoire continue  $Y$  au moyen d'une série de fonctions. Cette série de fonctions fait intervenir les dérivées successives de la distribution

normale  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ , les cumulants  $\gamma_n$  de la variable aléatoire correspondante et les cumulants  $\kappa_n$  de la variable aléatoire à approximer. Nous rappelons que les cumulants  $\kappa_n$  d'une variable aléatoire  $Y$  sont définis comme les coefficients du développement en série de Taylor du logarithme népérien de sa fonction caractéristique  $C_Y(t) = E[\exp(itY)]$  :

$$\ln C_Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{(it)^n}{n!} \quad (\text{C.20})$$

De plus, les cumulants d'une variable aléatoire  $Y$  s'expriment classiquement en fonction de ses moments non centrés  $\mu'_k = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k f_Y(y) dy$  sous la forme [AS70] :

$$\kappa_n = \mu'_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \kappa_k \mu'_{n-k} \quad (\text{C.21})$$

Soit  $\phi(t)$  la fonction caractéristique de  $\Phi(x)$  et soit  $C_Y(t)$  la fonction caractéristique de la distribution de  $Y$ . Par définition, ces quantités sont reliées par l'expression suivante :

$$C_Y(t) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n - \gamma_n) \frac{(it)^n}{n!} \right] \phi(t) \quad (\text{C.22})$$

A cette égalité sur les fonctions caractéristiques correspond l'égalité sur les fonctions de distribution :

$$F_Y(y) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n - \gamma_n) \frac{(-D)^n}{n!} \right] \Phi(x) \quad (\text{C.23})$$

où  $D$  est l'opérateur différentiel classique. En développant l'expression C.23 et en regroupant les termes selon l'ordre des dérivées, on obtient le développement en série de Gram-Charlier de la distribution  $F_Y(y)$  de la variable  $Y$ .

La méthode des séries d'Edgeworth [SO83] est directement dérivée de l'approche des séries de Gram-Charlier. Elle n'est pas rappelée ici dans la mesure où elle n'apporte rien d'essentiel par rapport à celle de Gram-Charlier.

La méthode des séries de Gram-Charlier permet donc d'approximer la fonction de densité d'une variable aléatoire  $Y$  à partir de ses cumulants et donc de ses moments statistiques et ce, sans faire aucune hypothèse *a priori* sur la forme de la densité. De plus, la méthode des séries de Gram-Charlier "tronquée" est simple par sa mise en œuvre puisqu'elle ne requiert que la connaissance ou la détermination des  $n$  premiers moments statistiques de la variable aléatoire  $Y$ . Elle est peu contraignante puisqu'elle ne suppose que la continuité de la densité sur  $\mathbb{R}$ . Les conclusions des travaux présentés dans [Bal98, ZO01, XC03] tendent à prouver que ces deux approches ne sont pas à privilégier dans le cadre de nos études car elles fournissent des résultats moins précis que d'autres méthodes telles que l'approche de la famille des distributions de Pearson.

### C.5.4 Exponentielle d'un polynôme (EPM)

Cette méthode a été proposée et décrite par G-K. Et dans [Er98]. La densité de probabilité  $f_Y(y)$  d'une variable aléatoire  $Y$  est approximée par une fonction de la



forme  $ce^{Q(y)}$  où  $Q(y)$  est une fonction polynomiale et  $c$  une constante de normalisation. Le problème réside donc dans l'évaluation des paramètres  $a_i$  du polynôme  $Q(x)$ .

### Formulation théorique de la méthode de l'exponentielle d'un polynôme

Soit  $f_Y(y)$  la fonction de densité d'une variable  $Y$ . On suppose que  $f_Y(y)$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Il est alors proposé d'approximer  $f_Y(y)$  par une fonction  $q(y)$  également définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$q(x) = ce^{Q(x)} \quad (\text{C.24})$$

avec  $c$  une constante de normalisation déterminée par :

$$c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{Q(y)} dy} \quad (\text{C.25})$$

et  $Q(y)$  défini par :

$$Q(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} a_i y^i & x \in \mathbb{R} \\ -\infty & x \rightarrow \pm\infty \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

où  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  sont des paramètres à déterminer.

De manière théorique, l'approximation de  $f_Y(y)$  par  $q(y)$  conduit à une erreur d'approximation  $\delta(y)$  que l'on peut évaluer au moyen de la relation suivante :

$$\delta(y) = [f_Y(y) - q(y)] e^{|y|^{\frac{1}{r}}} \quad (\text{C.27})$$

avec  $r$  un entier positif "grand" afin que les fonctions  $f_Y(y)e^{|y|^{\frac{1}{r}}}$  et  $q(y)e^{|y|^{\frac{1}{r}}}$  appartiennent à l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ , noté  $\mathcal{L}^2$ . Dans ce qui suit, on rappelle que le moment d'ordre  $k$  de la variable aléatoire  $Y$ ,  $\mu'_k$ , et le moment approché  $\tilde{\mu}'_k$  sont définis par :

$$\mu'_k = \mathbf{E} [Y^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k f_Y(y) dy \quad (\text{C.28})$$

$$\tilde{\mu}'_k = \tilde{\mathbf{E}} [Y^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k q(y) dy \quad (\text{C.29})$$

La théorie de l'approximation stipule alors que si les équations :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \mu'_{i+j-1} a_i = -j \mu'_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots \quad (\text{C.30})$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \mu'_{i-1} a_i = 0 \quad (\text{C.31})$$

sont vérifiées, alors,  $\delta(y) = 0$  (i.e.  $f_Y(y) = q(y)$ ).

### Mise en œuvre pratique

Dans la pratique, il est nécessaire d'utiliser la forme tronquée du polynôme  $Q(x)$  qui, sinon, possède une infinité de coefficients  $a_i$ . On utilise donc l'approximation suivante :

$$q_n(y) = c e^{Q_n(y)} \text{ avec } Q_n(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i y^i & x \in [\alpha, \beta] \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (n \geq 2) \quad (\text{C.32})$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes à déterminer,  $n$  le degré du polynôme et  $c_n$  la constante de normalisation alors définie par

$$c_n = \frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{Q_n(y)} dy} \quad (\text{C.33})$$

À ce stade de la méthode, il est nécessaire d'évaluer les  $n$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Les équations C.30 et C.31 conduisent à la détermination des coefficients  $a_i$  par la résolution d'un système d'équations linéaires où interviennent les moments successifs de la variable aléatoire  $Y$  :

$$\begin{bmatrix} \mu'_0 & 2\mu'_1 & \cdot & \cdot & \cdot & n\mu'_{n-1} \\ \mu'_1 & 2\mu'_2 & & & & n\mu'_n \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \mu'_{n-1} & 2\mu'_n & \cdot & \cdot & \cdot & n\mu'_{2(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -(n-1)\mu'_{(n-2)} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.34})$$

Le système d'équations linéaires C.34 montre que le nombre de moments de la variable aléatoire  $Y$  nécessaire à la détermination unique de  $n$  paramètres inconnus est  $2(n-1)$ . En pratique, la valeur de  $n$  est limitée, en général égale à 3 ou 4. Une fois les valeurs des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  déterminées, celle de  $c$  peut être facilement calculée par une méthode d'intégration numérique simple. L'expérience montre que la contribution de  $e^{Q_n(x)}$  à la constante de normalisation  $c_n$  devient négligeable dès que la valeur de  $x$  est supérieure à  $m_X + 4\sigma_X$  ou inférieure à  $m_X - 4\sigma_X$ , avec  $m_X$  et  $\sigma_X$  respectivement valeur moyenne et écart-type de  $X$ . On peut donc poser  $\alpha = m_X + 4\sigma_X$  et  $\beta = m_X - 4\sigma_X$ . Dans [Pen00], on conseille de poser  $\alpha = m_X + 5\sigma_X$  et  $\beta = m_X - 5\sigma_X$ . Le choix de  $\alpha$  et  $\beta$  est donc libre si aucune troncature n'est explicitement demandée. Cependant, il est important, si l'on peut les surestimer, de ne pas les sous-estimer.

La méthode de l'exponentielle de polynôme permet donc d'approximer la fonction de densité d'une variable aléatoire  $Y$  à partir de ses moments statistiques, et ce, sans faire aucune hypothèse *a priori* sur la forme de la densité. De plus, la méthode de l'exponentielle de polynôme est simple par sa mise en œuvre puisqu'elle ne requiert que la résolution d'un système linéaire, et peu contraignante puisqu'elle suppose uniquement la continuité de la densité sur  $\mathbb{R}$ . Dès lors que les moments de la variable aléatoire  $Y$ , dont on cherche à approximer la fonction de densité, sont connus, les résultats sont obtenus pratiquement de manière instantanée. Cette méthode présente cependant les inconvénients suivants [Pen00, PLM03] :

- C'est une méthode sensible à la précision et à l'ordre des moments utilisés pour l'approximation. L'approximation est meilleure lorsque la précision sur les moments est bonne et l'ordre grand. Or, il est difficile d'obtenir les moments d'ordres supérieurs à quatre avec une grande précision. A ce sujet, nous avons montré qu'il était possible d'appliquer cette méthode en réalisant le calcul à partir des moments centrés et normés par rapport à la moyenne  $\mu_Y$  et à l'écart-type  $\sigma_Y$  de la variable  $Y$ ,  $\tilde{\mu}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^k f_Y(y) dy$ . Nous allégeons ainsi de manière significative les efforts de calcul et nous réduisons sensiblement les problèmes de précision relatifs aux calculs numériques des moments d'ordres supérieurs.
- Il semblerait que plus le coefficient d'asymétrie ou "skewness" est élevé, plus l'approximation est mauvaise. Le coefficient d'asymétrie est défini par  $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\sigma_Y^3}$  où  $\mu_3$  est le moment centré d'ordre 3 et  $\sigma_Y$  l'écart-type de la variable aléatoire considérée.
- Enfin, même si on pouvait connaître un grand nombre de moments, la résolution du système linéaire C.34 deviendrait de plus en plus difficile car on tend alors à obtenir une matrice singulière.

### C.5.5 Transformation de Winterstein

La méthode est basée sur la définition des polynômes d'Hermite (Annexe D) et sur la transformation suivante : si  $Y_0$  est une variable aléatoire centrée réduite, alors il existe une fonction monotone  $g$  telle que  $U \equiv g^{-1}(Y_0)$ , où  $U$  est une variable aléatoire de loi normale de moyenne nulle et de variance unitaire [Win87]. Connaissant les  $N$  premiers moments centrés de  $Y$ , Winterstein montre que  $g$  peut être approximée par une suite de polynômes d'Hermite et que l'on peut en déduire une approximation de la fonction de densité de la variable aléatoire  $Y$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire de fonction de densité inconnue  $f_Y(y)$ . On suppose connus les  $N$ -premiers moments centrés de la variable  $Y$ . On considère également la variable aléatoire centrée réduite correspondante  $Y_0$  définie par :

$$Y_0 = \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} \quad (\text{C.35})$$

où  $m_Y$  et  $\sigma_Y$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de  $Y$ . Deux cas sont à distinguer suivant que le kurtosis de  $Y$  est supérieur à 3 ou non. Nous rappelons que le kurtosis, noté  $\beta_2$  ici, est défini par :

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_Y^4} \quad (\text{C.36})$$

où  $\mu_4$  est le moment centré d'ordre 4 de la variable considérée et  $\sigma$  son écart-type.

#### Premier cas : le kurtosis de $Y$ est supérieur à 3

Si le kurtosis de  $Y$  est supérieur à 3 alors la fonction  $g$  est convexe ( $g'' > 0$ ). La transformation  $g$  est alors approximée par :

$$y_0 = k \left[ u + \sum_{n=3}^N \tilde{h}_n H_{n-1}(u) \right] \quad (\text{C.37})$$

avec  $H_n$  le polynôme d'Hermite unidimensionnel d'ordre  $n$  et les coefficients  $k$  et  $\tilde{h}_n$  sont à déterminer. Les  $\tilde{h}_n$  sont assimilables à des coefficients de forme et  $k$  est un coefficient de normalisation scalaire assurant à  $Y_0$  une variance égale à 1. La fonction  $g$  devant être monotone, la condition suivante doit être satisfaite :

$$\frac{du}{dy_0} = \left[ k \left( 1 + \sum_{n=3}^N (n-1) \tilde{h}_n H_{n-2}(u) \right) \right]^{-1} > 0 \quad (\text{C.38})$$

Sous la condition C.38, la densité de  $Y$  est approximée par :

$$f_Y(y) \approx \frac{1}{\sigma_Y} \phi(u) \frac{du}{dy_0} \quad (\text{C.39})$$

où  $\phi$  est la fonction de densité de la variable aléatoire  $U$  (*i.e.* la densité de la loi normale standard).

Connaissant les  $N$ -premiers moments centrés réduits de la variable aléatoire  $Y$ , les coefficients  $\tilde{h}_n$  sont déterminés à partir de l'équation C.37 en écrivant l'égalité des moments successifs. Ceci conduit à la résolution d'un système non linéaire difficile à résoudre. La première forme d'approximation (transformation d'ordre 1) consiste à négliger les termes de la forme  $\tilde{h}_n \tilde{h}_m$ . On aboutit alors à la solution :

$$k = 1 \text{ et } \tilde{h}_n = h_n, \quad n = 3, 4, \dots \quad (\text{C.40})$$

avec :

$$h_n = \frac{1}{n!} \mathbf{E} [H_n(Y_0)] \quad (\text{C.41})$$

Le deuxième type de transformation, appelé aussi transformation d'ordre 2, prend en compte des termes  $\tilde{h}_n \tilde{h}_m$ . On obtient, d'après [Win87], la relation de récurrence :

$$h_{p+2} = \tilde{h}_{p+2} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^p \frac{1}{j(p-j)!} \sum_{l=3}^{N-|p-2j|} \frac{(l-1)!(l-1+|p-2j|)!}{\left(l-1-\frac{(p-|p-2j|)}{2}\right)!} \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+|p-2j|} \quad (\text{C.42})$$

avec comme coefficient de normalisation :

$$k = \left[ 1 + \sum_{n=3}^N (n-1) \tilde{h}_n^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{C.43})$$

### Deuxième cas : le kurtosis de $Y$ est inférieur ou égal à 3

Si le kurtosis de  $Y$  est inférieur ou égal à 3 alors la fonction  $g$  est concave ( $g'' < 0$ ). Dans ce cas il est difficile de construire directement la transformation  $g$  sous la forme d'une série de polynômes d'Hermite car ils doivent à la fois être monotones croissants et asymptotiquement concaves. Winterstein suggère donc d'utiliser une approximation de la transformation  $U = g^{-1}(X_0)$  sous la forme :

$$u = g^{-1}(y_0) = y_0 - \sum_{n=3}^N h_n H_{n-1}(y_0) \quad (\text{C.44})$$

Il s'agit d'une transformation du premier ordre qui est monotone si elle vérifie :

$$\frac{du}{dy_0} = 1 - \sum_{n=3}^N (n-1)h_n H_{n-2}(y_0) > 0 \quad (\text{C.45})$$

Sous cette dernière condition, la fonction de densité de  $Y$  est approximée par l'équation C.39. Pour  $N = 4$ , comme il s'agit d'une transformation du premier ordre, les coefficients sont donnés par C.41.

L'approximation de Winterstein permet donc d'approximer la fonction de densité d'une variable aléatoire sans aucune information *a priori* sur la forme de la fonction. L'un des intérêts de cette méthode est qu'elle n'utilise que des calculs de base (additions, multiplications,...). Elle est beaucoup moins technique et donc coûteuse en temps de calcul. Cependant, elle présente quelques inconvénients :

- La distinction entre les cas “kurtosis de  $Y$  est inférieur ou égal à 3” et “kurtosis de  $Y$  est supérieur à 3” est génératrice d'erreurs. En effet, lorsque l'on se trouve dans un cas où le kurtosis est approximativement égal à 3 avec les incertitudes statistiques qui peuvent peser sur son estimation [Pen00], on peut passer d'une approximation à l'autre sans qu'il y ait forcément continuité de la solution [Win87].
- Les conditions de monotonie C.38 et C.45 peuvent ne pas être satisfaites si les moments statistiques varient beaucoup.

Par conséquent, cette méthode fournit généralement des résultats moins précis que d'autres méthodes présentées dans cette annexe (e.g. famille des distribution de Pearson, méthode de l'exponentielle d'un polynôme) [SC03, PLM03].

## C.6 Fonctions $B$ -splines et estimation Bayésienne

Cette méthode a été initialement proposée par Zong et Lam dans [ZL98, ZL00, ZL01] puis reprise dans [PLM03]. Il s'agit d'approcher la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue à partir d'un échantillon de données sans faire d'hypothèses *a priori* sur la forme de la fonction de densité. Pour cela, on propose d'écrire la fonction de densité comme une combinaison linéaire de  $B$ -splines.

### C.6.1 Approximation de densités par des fonctions $B$ -splines

Théoriquement, toute fonction peut être approximée par un ensemble de fonctions  $B$ -splines. On propose ici d'utiliser une combinaison linéaire de fonctions  $B$ -splines pour approximer la densité de probabilité  $f_Y(y)$  d'une variable aléatoire continue  $y$  sous la forme :

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j B_j(y) \quad (\text{C.46})$$

avec  $N$  le nombre de fonctions  $B$ -splines,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$  le vecteur des coefficients à déterminer et  $B_j(x)$  une fonction  $B$ -spline d'ordre choisi [DB00, DP98]. Par exemple,

la fonction  $B$ -spline de second ordre est définie par :

$$B_j(y) = (y_j - y_s) \sum_{i=0}^3 \frac{(y_{s+i} - y)^2 \mathbf{1}_{\{y_{s+i} - y \geq 0\}}}{w'_s(y_{s+i})} \mathbf{1}_{\{y - y_s \geq 0\}} \quad (\text{C.47})$$

avec  $s = j - 3$ ,  $w_s(y) = \prod_{k=0}^3 (y - y_{s-k})$ ,  $\mathbf{1}$  la fonction indicatrice et ou  $0/0 = 0$  par convention.

La variable aléatoire  $Y$  est supposée à valeurs dans  $[c, d]$ . Soit  $y_0, \dots, y_n$  une partition de  $[c, d]$ , on a alors :

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \quad (\text{C.48})$$

Par extension, on note :  $y_{-2} = y_{-1} = y_0$  et  $y_n = y_{n+1} = y_{n+2}$ . Pour que  $f_Y(y)$  soit une fonction de densité de probabilité, les deux contraintes suivant doivent être respectées :

$$\alpha_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{C.49})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|\alpha) dx = \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} B_j(x) dx = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{x_j - x_{j-3}}{3} = 1 \quad (\text{C.50})$$

La première assure le caractère positif de la fonction de densité et la seconde impose la valeur unitaire de son intégrale.

Le vecteur  $\alpha$ , pour un nombre  $N$  donné de  $B$ -splines et pour un échantillon de taille  $n_s$  d'observations  $\{y_1, y_2, \dots, y_{n_s}\}$  de la variable  $Y^1$ , peut alors être estimé par  $\tilde{\alpha}$  au moyen du principe du maximum de vraisemblance en maximisant la quantité :

$$L = \sum_{l=1}^{n_s} \log(f_X(y_l|\tilde{\alpha})) \quad (\text{C.51})$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\alpha}_j \frac{x_j - x_{j-3}}{3} = 1 \text{ et } \tilde{\alpha}_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{C.52})$$

Pour des valeurs distinctes de  $N$ , on obtient bien sûr différentes approximations de la fonction de densité. Le problème est de savoir quelle est la meilleure approximation. Le critère de choix du modèle est basé sur la minimisation de l'entropie mesurée définie par :

$$ME = - \int f_X(x|\alpha) \log(f_X(x|\alpha)) dx + \frac{3(N-1)}{2n_s} \quad (\text{C.53})$$

### C.6.2 Actualisation Bayésienne

En raison d'un manque de données, les valeurs des paramètres  $\alpha_i$  déterminés plus haut ne sont pas les valeurs exactes. Soient  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , les valeurs réelles des paramètres  $\alpha_i$ , alors on a :

$$\alpha_i = \beta_i + w_i \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{C.54})$$

<sup>1</sup>Dans [PLM03], il est précisé que cette méthode ne donne des résultats satisfaisants que si la taille de l'échantillon vérifie  $N \leq 2\sqrt{n_s}$ .

où l'écart  $w_i$  est modélisé par une variable aléatoire de loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Généralement plus l'échantillon est petit, plus la valeur de  $\sigma^2$  est grande. En supposant  $\beta$  donnée, la fonction de vraisemblance pour  $\alpha$  est donnée par :

$$P(\alpha|\beta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\alpha_i - \beta_i)^2 \right\} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|\alpha - \beta\|^2 \right\} \quad (\text{C.55})$$

avec  $\|\cdot\|$  norme euclidienne telle que  $\|\beta\| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_N^2}$ .

L'une des conditions pour que l'estimation soit acceptable est la propriété de lissage de la fonction de densité. Autrement dit, la dérivée de la fonction doit être continue. Cette condition aboutit à la définition de la fonction de densité *a priori* du vecteur  $\beta$  [ZL00] :

$$P(\beta) = \omega^{N-2} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{N-2} \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{2\sigma^2} \|[D]\beta\|^2 \right\} \quad (\text{C.56})$$

où  $[D]$  est la matrice tridiagonale suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{(N-2) \times N} \quad (\text{C.57})$$

et  $\omega$  un paramètre à déterminer et que l'on explicite par la suite. D'après le théorème de Bayes, on a :

$$P(\beta|\alpha) = C \cdot P(\alpha|\beta)P(\beta) \quad (\text{C.58})$$

avec  $C$  une constante de normalisation. De C.55 et C.56, on obtient la distribution *a posteriori* :

$$P(\beta|\alpha) = C \times \omega^{N-2} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{2N-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \|\alpha - \beta\|^2 + \omega^2 \|[D]\beta\|^2 \right] \right\} \quad (\text{C.59})$$

D'après la statistique Bayésienne, l'estimateur  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  sachant  $\alpha$  est le minimum de la fonction  $Q^2(\beta) = \|\alpha - \beta\|^2 + \omega^2 \|[D]\beta\|^2$  de laquelle on tire l'expression de  $\hat{\beta}$  suivante :

$$\hat{\beta} = \left( [I] + \omega^2 [D]^T [D] \right)^{-1} \alpha \quad (\text{C.60})$$

où  $[I]$  est la matrice identité de dimension  $N \times N$ . L'actualisation Bayésienne de la fonction de densité de la variable aléatoire  $Y$  initiale (Eq. C.46) est ainsi donnée par :

$$f_Y(y|\hat{\beta}) = \sum_{j=1}^N \hat{\beta}_j B_j(y) \quad (\text{C.61})$$

Celle-ci dépend du paramètre  $\omega$ . Le critère de choix de ce paramètre est basé sur la minimisation de l'entropie Bayésienne mesurée définie par :

$$MEB(\omega^2) = -2 \log P(\alpha|\omega^2) = -2 \log \int P(\alpha|\beta)P(\beta)d\beta \quad (\text{C.62})$$

Cette méthode est intéressante car elle permet d'approximer la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle  $Y$  à partir d'un échantillon de données, même si les données sont peu nombreuses, ce qui est souvent le cas dans les problèmes physiques, et ce sans faire aucune hypothèse *a priori* sur la forme de la fonction. On remarque ici que la connaissance des moments statistiques de la variable aléatoire  $Y$  n'est pas nécessaire pour appliquer cette méthode. Cependant, elle présente d'importantes limitations [PLM03] :

- Elle se restreint aux cas des fonctions continues et bornées. De plus, l'approximation doit être réalisée avec un nombre  $N$  de  $B$ -splines suffisant (généralement supérieur à cinq).
- L'approximation dépend de l'échantillon utilisé : l'approximation n'est plus la même pour des échantillons différents.
- La méthode non Bayésienne n'est valable que pour un nombre limité de fonctions  $B$ -splines ( $N \leq 2\sqrt{n_s}$ ) ; au delà on constate des irrégularités dans l'approximation obtenue.
- La méthode Bayésienne permet d'éliminer ces irrégularités mais l'approximation obtenue n'a plus forcément les propriétés statistiques d'une fonction de densité.
- La quantité  $ME$  introduite dans l'équation C.53 n'est pas toujours définie car elle fait apparaître le logarithme de la fonction approximée qui, elle, peut s'annuler. Le critère de choix n'est donc pas toujours valable.
- Le critère de choix du modèle Bayésien ne semble pas le plus adapté sachant que l'existence d'un minimum pour la quantité  $MEB$  n'est pas prouvée.
- Le temps de calcul devient conséquent notamment pour la mise en œuvre de la méthode Bayésienne.

## C.7 Développement sur la base d'un chaos polynomial

Les méthodes de développement d'une variable aléatoire quelconque sur le chaos polynomial [GS91] ont fait l'objet d'une attention toute particulière ces dernières années. Elles se présentent aujourd'hui comme une alternative très intéressante pour résoudre le problème ouvert de l'approximation de variables aléatoires quelconques. Le principe fondamental de cette méthode utilise le fait que toute variable aléatoire peut s'écrire, dans l'espace de probabilité  $\mathcal{L}^2(\Theta, F, P)$ , sous la forme [Mal97] :

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(\xi) \quad (\text{C.63})$$

où  $H_i$  est le polynôme d'Hermite unidimensionnel d'ordre  $i$ ,  $\xi$  est une variable Gaussienne centrée réduite et les  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$  des coefficients à déterminer. Lorsque la variable aléatoire  $Y$  à approximer résulte de la transformation  $M(\cdot)$  de plusieurs variables aléatoires  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ , le développement est effectué sur la base du chaos polynomial multidimensionnel qui peut se mettre sous la forme :

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Psi_i(\xi) \quad (\text{C.64})$$



où les  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$  sont des coefficients à déterminer, les  $\Psi_i$  sont les polynômes d'Hermite multidimensionnels formant le chaos polynomial,  $\xi$  est un vecteur de variables aléatoires normales centrées réduites construit par transformation isoprobabiliste (voir section E.2.1 de l'annexe E) du vecteur des données d'entrée physiques  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ . La définition du chaos polynomial et la construction des  $\Psi_i$  sont détaillées dans l'annexe D.

Dans la pratique les développements C.63 et C.64 sont tronqués à un ordre  $P$  fini en fonction de la précision souhaitée et le problème se réduit à la détermination des coefficients  $\{a_i\}_{i=0}^{P-1}$ . Les techniques disponibles pour l'estimation des coefficients  $a_i$  reposent sur des méthodes de projection, de collocation et de régression.

### C.7.1 Méthode de projection

Cette méthode, présentée dans [Pui03], utilise la propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite. En multipliant l'expression C.64 par  $\Psi_i$  et en prenant l'espérance, on obtient :

$$a_i = \frac{\mathbf{E}[Y \Psi_i(\xi)]}{\mathbf{E}[\Psi_i(\xi)^2]} \quad (\text{C.65})$$

où  $\mathbf{E}[\Psi_i(\xi)^2] = i!$  (Annexe D). Le numérateur  $\mathbf{E}[Y \Psi_i(\xi)]$  est l'espérance d'une fonction. Il peut s'écrire sous forme intégrale :

$$\mathbf{E}[Y \Psi_i(\xi)] = \int_{\mathbb{R}^n} M(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{C.66})$$

où  $\varphi_n(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2}$  est la densité de probabilité multinormale de dimension  $n$ . On obtient finalement :

$$a_i = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} M(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{i!} \quad (\text{C.67})$$

Le calcul de ces coefficients  $a_i$  se fait numériquement soit par simulation de Monte Carlo, soit par quadrature ou cubature de l'intégrale (*e.g.* quadrature de Gauss [AS70], cubature de Smolyak [Smo63]).

### C.7.2 Méthode de collocation et de régression

Ces méthodes constituent une alternative à la méthode de projection ne nécessitant pas l'évaluation d'une intégrale.

#### Méthode de collocation

La méthode de collocation est issue de travaux présentés dans [WTM96]. Il s'agit d'approximer une variable aléatoire  $Y$  de loi inconnue, mais dont on est en mesure de connaître un certain nombre de réalisations, par la variable  $\hat{Y} = \sum_{i=0}^{P-1} a_i \Psi_i(\xi)$  obtenue en tronquant la série C.64 à un ordre  $P$  dépendant de la précision souhaitée. Soient  $P$  réalisations  $\{\xi^{[1]}, \dots, \xi^{[P]}\}$  du vecteur  $\xi$  appelées points de collocation. On en

déduit les  $P$  réalisations du vecteur aléatoire des paramètres d'entrée  $\{\mathbf{X}^{[1]}, \dots, \mathbf{X}^{[P]}\}$  par transformations isoprobabilistes. La méthode de collocation consiste alors à écrire l'égalité entre  $Y^{[i]}$  et  $\tilde{Y}^{[i]}$  pour chacune des  $P$  réalisations en fonction des coefficients inconnus  $\{a_i\}_{i=0}^{P-1}$ , ce qui peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0(\boldsymbol{\xi}^{[1]}) & \cdots & \Psi_{P-1}(\boldsymbol{\xi}^{[1]}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(\boldsymbol{\xi}^{[P]}) & \cdots & \Psi_{P-1}(\boldsymbol{\xi}^{[P]}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^{[1]} \\ \vdots \\ Y^{[P]} \end{pmatrix} \quad (\text{C.68})$$

La résolution de ce système linéaire permet d'obtenir les coefficients  $\{a_0, \dots, a_{P-1}\}$  recherchés. On remarque que l'on ne peut pas choisir librement le nombre de points de collocation : il est imposé par la taille du chaos polynomial  $P$ . Par conséquent, le nombre de points de collocation utilisé ne suffit généralement pas pour obtenir des résultats avec une précision satisfaisante. L'idée d'augmenter le nombre de points de collocation conduit alors naturellement à l'utilisation de méthodes de régression [Isu99, SBL06].

### Méthode de régression

Soit  $N > P$  réalisations  $\{\boldsymbol{\xi}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{[N]}\}$  du vecteur  $\boldsymbol{\xi}$  appelées points de régression. On en déduit les  $N$  réalisations du vecteur aléatoire des paramètres d'entrée  $\{\mathbf{X}^{[1]}, \dots, \mathbf{X}^{[N]}\}$  par transformations isoprobabilistes. Pour chaque réalisation, on évalue  $Y^{[i]} = M(\mathbf{X}^{[i]})$ . À l'aide de la méthode des moindres carrés, on minimise l'écart quadratique  $\Delta Y$  entre les variables  $Y$  et  $\tilde{Y}$  par rapport aux coefficients  $\{a_i\}_{i=0}^{P-1}$  :

$$\Delta X = \sum_{j=1}^N \left( Y^{[j]} - \sum_{i=0}^{P-1} a_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}^{[j]}) \right)^2 \quad (\text{C.69})$$

Le minimum est obtenu pour des valeurs de  $\{a_i\}_{i=0}^{P-1}$  vérifiant :

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial a_l} = 0, \quad \forall l \in \{0, \dots, P-1\} \quad (\text{C.70})$$

Les coefficients  $\{a_i\}_{i=0}^{P-1}$  sont alors calculés par le biais de la résolution du système linéaire équivalent suivant :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N \Psi_0(\xi^{[j]}) \Psi_0(\xi^{[j]}) & \cdots & \sum_{j=1}^N \Psi_0(\xi^{[j]}) \Psi_{P-1}(\xi^{[j]}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N \Psi_{P-1}(\xi^{[j]}) \Psi_0(\xi^{[j]}) & \cdots & \sum_{j=1}^N \Psi_{P-1}(\xi^{[j]}) \Psi_{P-1}(\xi^{[j]}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{P-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N Y^{[j]} \Psi_0(\xi^{[j]}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N Y^{[j]} \Psi_{P-1}(\xi^{[j]}) \end{pmatrix} \tag{C.71}
 \end{aligned}$$

Lors de l'application de ces méthodes de collocation et de régression pour l'approximation d'une variable aléatoire  $Y$  résultant d'une transformation  $M(\cdot)$  de plusieurs variables aléatoires  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  dont on connaît les lois, la principale difficulté que l'on rencontre réside dans le choix du plan d'expériences  $\{\mathbf{X}^{[1]}, \dots, \mathbf{X}^{[N]}\}$ . Cependant, il existe des règles permettant généralement la construction de plans d'expériences adéquats [SBL06].

L'approximation d'une variable aléatoire quelconque par développement sur la base d'un chaos polynomial démontre son efficacité et sa robustesse à travers de nombreux travaux. Elle apparaît même beaucoup plus attractive que les autres méthodes rappelées dans cette annexe. Cependant, si nous disposons ainsi d'un très bon moyen d'approximation d'une variable aléatoire quelconque, le problème de la reconstruction analytique ou point par point de sa fonction de densité reste entier : la mise en œuvre d'une méthode telle que celles présentées précédemment est requise (*e.g.* *FORM*, méthode de moments).

## C.8 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette annexe au calcul des propriétés statistiques et à l'identification de la fonction de densité de probabilité  $f_Y(y)$  ou de la fonction de distribution de probabilité  $F_Y(y)$  d'une variable aléatoire quelconque  $Y$  résultant d'une transformation quelconque  $M(\cdot)$  de variables aléatoires  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ . Ce problème n'a pas de solution générale : d'une part cela implique l'existence de plusieurs méthodes susceptibles d'y répondre, d'autre part, cela suggère encore à l'heure actuelle un certain nombre de perspectives de recherche.

L'étude bibliographique comparative que nous avons réalisée avait pour but de choisir parmi ces différentes méthodes celle qui nous semble la plus adaptée à notre problème et bien sûr celle qui assure l'obtention des meilleures approximations. Au

vu des différentes conclusions intermédiaires auxquelles nous sommes arrivées, nous retenons la méthode du développement de variables aléatoires sur le chaos polynomial dont les coefficients sont déterminés par une méthode de régression. Même si elle ne permet pas directement l'obtention d'une expression analytique de la fonction de densité de la variable aléatoire  $Y$ , elle se positionne comme la méthode fournissant l'approximation la plus efficace quelle que soit la nature de la variable aléatoire considérée. Lorsque nous aurons besoin d'une expression analytique de la densité d'une variable aléatoire  $Y$  alors nous la reconstruirons au moyen de la méthode de l'exponentielle d'un polynôme (*EPM*) en utilisant les moments calculés à partir de son développement sur la base du chaos polynomial. Sa simplicité mais aussi la qualité de ses résultats, nous conduisent à la retenir plutôt qu'une approche par famille de distributions de Pearson ou par la transformation de Winterstein.

Il est bien évident que le choix de ces méthodes reste très subjectif. Si cette étude bibliographique permet de dégager les méthodes les plus efficaces en fonction du problème qui nous est posé et d'éliminer les moins appropriées, une comparaison effective des différentes méthodes sur de multiples exemples permettrait de valider la sélection de la "bonne" méthode d'approximation : celle réalisant le meilleur compromis entre précision, facilité de mise en œuvre et intégration dans le cadre d'une méthodologie plus globale. Ici, nous avons essentiellement fait confiance aux multiples expériences rapportées dans la littérature.

## Annexe D

# Implémentation du chaos polynomial [SDK00]

### D.1 Définition du chaos polynomial

Le chaos polynomial de dimension  $M$  et d'ordre  $p$  est défini comme l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en  $M$  variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}$  dont le degré ne dépasse pas  $p$ . Chacun de ces polynômes est complètement défini par une liste  $\alpha$  de  $M$  entiers positifs  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$  de la manière suivante :

$$\Psi_\alpha = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\xi_i), \quad \alpha_i \geq 0 \quad (\text{D.1})$$

où  $H_q(\cdot)$  est le  $q$ -ième polynôme d'Hermite. Le degré de la liste  $\alpha$  est quant à lui donné par  $|\alpha| = \sum_{i=1}^M \alpha_i$ .

### D.2 Polynômes d'Hermite unidimensionnels

Les polynômes d'Hermite sont classiquement définis comme une suite fonctionnelle s'obtenant par dérivations successives de la fonction  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ , qui n'est autre que la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire normale normée centrée :

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (-1)^k \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \quad (\text{D.2})$$

Par convention,  $H_0(x) = 1$ , et les polynômes d'Hermite vérifient alors la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_k(x) = xH_{k-1}(x) - \frac{dH_{k-1}(x)}{dx} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Les premiers polynômes d'Hermite sont ainsi :

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= x \\
H_2(x) &= x^2 - 1 \\
H_3(x) &= x^3 - 3x \\
H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x
\end{aligned} \tag{D.4}$$

On note que le terme de plus haut degré de  $H_n$  est  $x^n$ .

Les polynômes d'Hermite sont  $\varphi$ -orthogonaux et vérifient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(x) H_j(x) \varphi(x) dx = \delta_{ij} i! \tag{D.5}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Les résultats supplémentaires suivants peuvent également être démontrés :

$$\frac{d}{dx} H_k(x) = k H_{k-1}(x) \tag{D.6}$$

et

$$H_i(x) H_j(x) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} C_{ijk} H_k(x) \tag{D.7}$$

avec

$$\begin{cases} C_{ijk} = 0 & \text{si } \frac{i+j+k}{2} \notin \mathbb{N} \\ C_{ijk} = \frac{i!j!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)! \left(\frac{i+k-j}{2}\right)! \left(\frac{j+k-i}{2}\right)!} & \text{sinon} \end{cases} \tag{D.8}$$

Pour toute variable aléatoire Gaussienne centrée réduite, l'équation D.5 permet d'obtenir une expression analytique de l'espérance d'un produit de deux polynômes de Gaussiennes. Le résultat s'interprète comme suit :

$$\mathbf{E}[H_i(\xi) H_j(\xi)] = \delta_{ij} i!$$

Enfin, en utilisant la relation D.7, l'espérance d'un produit de trois polynômes de Gaussiennes  $D_{ijk} = \mathbf{E}[H_i(\xi) H_j(\xi) H_k(\xi)]$  est donnée par :

$$\begin{cases} D_{ijk} = \frac{i!j!k!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)! \left(\frac{j+k-i}{2}\right)! \left(\frac{k+i-j}{2}\right)!} & \text{si } i+j+k \text{ pair et } k \in [|i-j|, i+j] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{D.9}$$

### D.3 Implémentation récursive du chaos polynomial $\Psi_\alpha$

L'implémentation du chaos polynomial D.1 requiert [SDK00] :

1. le calcul et le stockage des polynômes de Hermite unidimensionnels  $H_k(x)$  ;
2. la génération de toutes les listes  $\alpha$ , dont le degré est inférieur ou égal à  $p$ .

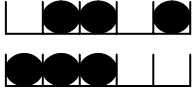

Remplissage des cases	Séquence d'entiers	Base des polynômes
	<b>1 0 1 0</b>	$H_1(\xi_1)H_1(\xi_3) = \xi_1\xi_3$
	<b>0 0 0 2</b>	$H_2(\xi_4) = \xi_4^2 - 1$

FIG. D.1 – Correspondance entre un tirage de boules et  $\alpha$  pour  $(M = 4, p = 2)$ .

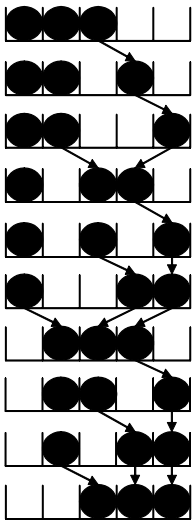




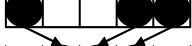




Remplissage des cases	Séquence d'entiers	Base des polynômes
	<b>0 0 0 2</b>	$\xi_4^2 - 1$
	<b>0 0 1 1</b>	$\xi_3\xi_4$
	<b>0 0 2 0</b>	$\xi_3^2 - 1$
	<b>0 1 0 1</b>	$\xi_2\xi_4$
	<b>0 1 1 0</b>	$\xi_2\xi_3$
	<b>0 2 0 0</b>	$\xi_2^2 - 1$
	<b>1 0 0 1</b>	$\xi_1\xi_4$
	<b>1 0 1 0</b>	$\xi_1\xi_3$
	<b>1 1 0 0</b>	$\xi_1\xi_2$
	<b>2 0 0 0</b>	$\xi_1^2 - 1$

FIG. D.2 – Génération récursive du chaos polynomial  $(M = 4, p = 2)$ .

Pour chaque degré  $q = 1, \dots, p$ , l'objectif est de calculer toutes les listes de  $M$  entiers positifs compris entre 0 et  $q$  dont la somme est égale à  $q$ . Ce problème est équivalent à celui de remplir  $(M + q - 1)$  cases avec  $(M - 1)$  boules (Fig. D.1). La correspondance entre la séquence d'entiers et le remplissage des cases est la suivante :

- pour chaque entier  $\alpha_i$  de la séquence, on laisse  $\alpha_i$  cases vides et on place une boule dans la case suivante ;
- réciproquement, pour chaque positionnement de boules, chaque entier de la séquence est égal au nombre de cases vides (y compris 0) entre deux boules consécutives.

Il en résulte que le nombre  $\alpha$  de listes de degré  $\partial_\alpha = q$  est le nombre de séquences de boules correspondantes. Il s'agit du coefficient binomial  $\binom{M+q-1}{M-1} = \binom{M+q-1}{q}$ . D'où le

$$\text{nombre de listes total } P = \sum_{q=0}^p C_{M+q-1}^q = \frac{(M+p)!}{M!p!}.$$

L'algorithme utilisé ici pour générer tous les remplissages possibles de  $(M + q - 1)$  cases avec  $(M - 1)$  boules est le suivant :

- pour un  $q$  donné, la position initiale est celle où les boules se trouvent dans les  $(M - 1)$  premières cases, ce qui correspond à la liste  $\alpha = \{0, \dots, 0, q\}$ .

- A partir d'un tirage de boules, le suivant est obtenu de manière récursive en déplaçant la boule la plus à droite d'une case à droite. Si ce n'est pas possible, *i.e.* la boule est déjà dans la position la plus à droite, alors on cherche la boule la plus à droite qui peut être déplacée d'une case vers la droite. Cette boule est déplacée, et toutes les boules se trouvant à sa droite sont ramenées dans la case se trouvant à leur gauche.

Cette procédure est illustrée dans la figure D.2.

## D.4 Moments statistiques d'une variable développée sur un chaos polynomial

Soit une variable aléatoire  $X$  issue d'une transformation quelconque de variables aléatoires dont une approximation  $\tilde{X}$  est donnée à partir d'un développement sur la base d'un chaos polynomial :

$$X \approx \tilde{X} = \sum_{i=0}^{P-1} x_i \Psi_i \left( \{\xi_k\}_{k=1}^M \right) \quad (\text{D.10})$$

A partir de l'équation D.10 et en utilisant la propriété d'orthogonalité décrite dans l'équation D.5, on peut déterminer de manière analytique les moments statistiques de la variable aléatoire  $X$ . En particulier, la moyenne de  $X$  est donnée par :

$$\mathbf{E} [\tilde{X}] = x_0 \quad (\text{D.11})$$

La variance de  $X$  s'écrit :

$$\mathbf{var} [\tilde{X}] = \sigma_{\tilde{X}}^2 = \sum_{i=1}^{P-1} \mathbf{E} [\Psi_i^2] x_i^2 \quad (\text{D.12})$$

De même les coefficients d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis) valent respectivement :

$$\delta_{\tilde{X}} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{X}}^3} \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{P-1} D_{ijk} x_i x_j x_k \quad (\text{D.13})$$

$$\kappa_{\tilde{X}} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{X}}^4} \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{l=1}^{P-1} \mathbf{E} [\Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_l] x_i x_j x_k x_l \quad (\text{D.14})$$



## Annexe E

# Méthodes classiques d'analyse de fiabilité des structures[Lem05b]

### E.1 Introduction

L'objectif essentiel de l'analyse de fiabilité des structures consiste à évaluer la probabilité de défaillance d'une structure ou d'un dispositif mécanique en tenant compte de la variabilité et des incertitudes de caractérisation des paramètres de conception (géométrie, propriétés des matériaux, ...) ainsi que de celles des paramètres de fonctionnement (chargement, actions extérieures appliquées au système). Elle repose ainsi sur la donnée du modèle probabiliste des variables intervenant dans la modélisation physique du problème examiné et sur la définition d'une ou de plusieurs fonctions d'état limite traduisant la performance du dispositif au regard de critères préalablement identifiés. Outre l'estimation d'une probabilité de défaillance (non respect d'un critère de performance), l'application des méthodes de fiabilité des structures fournit des résultats fondamentaux pour l'aide à la décision et au dimensionnement de structures et de dispositifs mécaniques en contexte aléatoire. Dans cette annexe, on présente les notions élémentaires de l'analyse de fiabilité des structures ainsi que le schéma d'analyse classique pour des problèmes indépendants du temps.

Soit  $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))^T$ , le vecteur composé de l'ensemble des variables aléatoires intervenant dans la modélisation du comportement mécanique et physique du dispositif étudié. Soit  $M(\mathbf{X}(\omega))$  la réponse mécanique ou physique aléatoire de celui-ci. Pour chacun de ces modes de défaillance ou pour chaque critère de performance, une fonction d'état limite  $G(\mathbf{X}(\omega), M(\mathbf{X}(\omega)))$  est définie dans l'espace des paramètres. Elle permet de définir le domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f$  (domaine de performance dégradée voire inacceptable), le domaine de sûreté  $\mathcal{D}_s$  (domaine de performance attendu et acceptable) et la surface d'état limite  $\Sigma$ . Par convention, ils s'écrivent :

$$\mathcal{D}_f = \{\mathbf{X}(\omega); G(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) \leq 0\} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathcal{D}_s = \{\mathbf{X}(\omega); G(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) > 0\} \quad (\text{E.2})$$

$$\Sigma = \{\mathbf{X}(\omega); G(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) = 0\} \quad (\text{E.3})$$

La forme générale de la probabilité de défaillance  $P_f$  est alors donnée par :

$$P_f = \text{Prob} [G(\mathbf{x}, M(\mathbf{x})) \leq 0] = \int_{\mathcal{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{E.4})$$

Cette formulation suppose que la densité de probabilité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  du vecteur  $\mathbf{X}(\omega)$  est connue et que l'intégration directe est possible, deux exigences qui ne sont que très rarement satisfaites. Du fait de la complexité du domaine  $\mathcal{D}_f$  (généralement obtenu de manière implicite) et de celle de  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  qui peut faire intervenir un nombre important de variables, le calcul de  $P_f$  n'est généralement pas aisé. Des méthodes d'évaluation de  $P_f$  par intégration numérique, par simulation ou encore par échantillonnage puis intégration existent. Cependant, elles restent d'application limitée et une méthode d'approximation efficace de  $P_f$  par indice de fiabilité a été progressivement élaborée.

## E.2 Approche usuelle par indice de fiabilité

L'approche usuelle de l'approximation de  $P_f$  par indice de fiabilité comprend les grandes étapes suivantes :

- Une transformation isoprobabiliste des variables physiques  $\mathbf{X}$  dans l'espace des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes  $\mathbf{U}$  (espace standard - espace normé centré). Le passage dans cet espace spécifique assure l'invariance de l'estimation de  $P_f$  par rapport à la définition du problème de fiabilité.
- La recherche dans l'espace standard du point de la surface d'état limite  $\Sigma$ , où la densité de probabilité est maximale. C'est le point de  $\Sigma$  le plus proche de l'origine. Il est communément appelé point de défaillance le plus probable ou point de conception. Il est noté  $\mathbf{P}^*$ .
- L'estimation de la probabilité de défaillance par la méthode d'approximation *FORM* (*First Order Reliability Method*) qui peut être corrigée par l'application d'une méthode *SORM* (*Second Order Reliability Method*).
- La validation des approximations *FORM* et *SORM* par une méthode de simulation de Monte Carlo conditionnée (*e.g.* technique des tirages d'importance).

### E.2.1 Transformation isoprobabiliste

La transformation isoprobabiliste notée  $\mathbf{T}$  dans la suite, vise à simplifier la fonction de densité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  intervenant dans l'intégrale de la probabilité de défaillance (Eq. E.4). En supposant qu'une telle transformation existe, celle-ci consiste à écrire la probabilité de défaillance  $P_f$  sous la forme :

$$P_f = \int_{\mathcal{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{H(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{u}) du_1 du_2 \dots du_n \quad (\text{E.5})$$

où :

- $\mathbf{U}$  est le vecteur de variables gaussiennes centrées réduites et indépendantes associé aux vecteurs des variables physiques de base  $\mathbf{X}$  par la transformation isoprobabiliste  $\mathbf{T}$ .

- $\varphi_n(\mathbf{u})$  est la fonction de densité multinormale centrée réduite de composantes indépendantes en dimension  $n$  :

$$\varphi_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2\right) \quad (\text{E.6})$$

- $H(\mathbf{u})$  est la fonction de performance  $G(\mathbf{x})$  exprimée dans l'espace standard.

Lorsque les lois des variables  $X_i$  sont quelconques et indépendantes, la transformation  $\mathbf{T}$  reste simple. En effet, la correspondance entre  $X_i$  et  $U_i$  est alors donnée par :

$$x_i \xrightarrow{T_i} u_i \Leftrightarrow \Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \quad (\text{E.7})$$

où  $\Phi$  et  $F_{X_i}$  sont les fonctions de répartition respectivement de la loi gaussienne centrée réduite et de la variable  $X_i$ . On obtient donc :

$$x_i \xrightarrow{T_i} u_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad (\text{E.8})$$

Lorsque les variables sont corrélées, il est nécessaire d'utiliser la transformation de Rosenblatt ou le modèle de distribution multivariée de Nataf [LDK86].

### Transformation de Rosenblatt

L'utilisation de la transformation de Rosenblatt [Ros52] dans le cadre de l'analyse de la fiabilité des structures a été introduite par Hohenblicher et Rackwitz dans [HR81]. Elle permet de résoudre le problème posé par l'évaluation de la probabilité de défaillance  $P_f$  dans le cadre le plus général. Elle est définie par :

$$\mathbf{T} : \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \Phi^{-1}[F_{X_1}(x_1)] \\ u_2 = \Phi^{-1}[F_{X_2}(x_2|x_1)] \\ \vdots \\ u_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1})] \\ \vdots \\ u_n = \Phi^{-1}[F_{X_n}(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})] \end{array} \right\} \quad (\text{E.9})$$

où  $F_{X_i}(x_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$  est la distribution de  $X_i$  sachant  $X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$ . La variable  $X_1$  est d'abord transformée en une variable gaussienne centrée réduite, puis la variable conditionnée  $X_2|X_1 = x_1$  est à son tour transformée en une variable gaussienne centrée réduite et ainsi de suite.

La transformation inverse est obtenue incrémentalement de la même manière :

$$\mathbf{T}^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = F_{X_1}^{-1}[\Phi(u_1)] \\ x_2 = F_{X_2}^{-1}[\Phi(u_2)|x_1] \\ \vdots \\ x_i = F_{X_i}^{-1}[\Phi(u_i)|x_1, x_2, \dots, x_{i-1}] \\ \vdots \\ x_n = F_{X_n}^{-1}[\Phi(u_n)|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \end{array} \right\} \quad (\text{E.10})$$

La fonction d'état limite est alors donnée par :

$$G(\mathbf{x}) = G(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u})) = H(\mathbf{u}) \quad (\text{E.11})$$

Ces dérivées partielles s'expriment sous la forme :

$$\frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{J}_{ji} \quad (\text{E.12})$$

où  $\mathbf{J}_{ji}$  est la matrice jacobienne de la transformation définie par :

$$\mathbf{J}_{ji}^{-1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, i < j \\ \frac{f_{X_i}(x_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1})}{\varphi(u_i)}, i = j \\ \frac{\frac{\partial}{\partial X_i} F_{X_i}(x_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1})}{\varphi(u_i)}, i > j \end{array} \right\} \quad (\text{E.13})$$

La transformation de Rosenblatt n'est pas unique. Les formulations E.9 et E.10 supposent clairement le choix d'un ordre des variables. En outre, la transformation de Rosenblatt est très contraignante dans le sens où elle requiert la connaissance de la densité de probabilité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Le modèle de distribution multivariée de Nataf, qui ne demande que la donnée des distributions marginales  $F_{X_i}(x_i)$  et de la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}$  des  $X_i$ , lui est généralement préféré dans la pratique.

### Modèle de distribution multivariée de Nataf

Soit  $\hat{\mathbf{U}} = (\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n)^T$  le vecteur de variables gaussiennes centrées réduites corrélées deux à deux obtenu par la transformation marginale de chaque composante du vecteur  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  :

$$\hat{u}_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad (\text{E.14})$$

La distribution de Nataf [Nat62] pour  $\mathbf{X}$  est obtenue à partir de la densité de probabilité conjointe normale de  $\hat{\mathbf{U}}$  par la relation suivante :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \frac{\varphi_n(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\rho}_0)}{\varphi(\hat{u}_1) \varphi(\hat{u}_2) \dots \varphi(\hat{u}_n)} \quad (\text{E.15})$$

où les éléments  $\rho_{0,ij}$  de  $\boldsymbol{\rho}_0$  sont définis à partir des coefficients de corrélation  $\rho_{ij}$  au travers de la relation intégrale :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left( \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j) \frac{\varphi_2(\hat{u}_i, \hat{u}_j, \rho_{0,ij})}{\varphi(\hat{u}_i) \varphi(\hat{u}_j)} dx_i dx_j \quad (\text{E.16})$$

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left( \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \varphi_2(\hat{u}_i, \hat{u}_j, \rho_{0,ij}) d\hat{u}_i d\hat{u}_j \quad (\text{E.17})$$

Ils sont calculés soit de manière itérative soit en exploitant les formules approximatives développées dans [LDK86]. La transformation en variables indépendantes s'écrit alors :

$$u_i = T_i(x_j) = \sum_j \Gamma_{0,ij} \hat{u}_j = \sum_j \Gamma_{0,ij} \Phi^{-1}(F_{X_j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_f)) \quad (\text{E.18})$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}_0$  est l'inverse de la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation recalée  $\boldsymbol{\rho}_0$ , obtenue à partir de la matrice de corrélation initiale  $\boldsymbol{\rho}$ .

Le modèle de distribution multivariée de Nataf est valide tant que la correspondance entre  $\hat{u}_i$  et  $x_i$  définie par la relation E.14 est unique et que la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}_0$  est définie positive. La première condition est vérifiée lorsque les distributions marginales  $F_{X_i}(x_i)$  sont continues et strictement croissantes. La seconde condition est satisfaite dans la majeure partie des cas pratiques puisque la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}$  de  $\mathbf{X}$  est définie positive et que l'on montre que les différences entre  $\rho_{0,ij}$  et  $\rho_{ij}$  sont petites.

### E.2.2 Recherche du point de conception et indice de fiabilité $\beta$

La recherche du point de conception  $\mathbf{P}^*$  s'effectue dans l'espace standard. Il y est noté  $\mathbf{u}^*$  et n'est autre que le point de la surface d'état limite où la densité de probabilité de  $\mathbf{U}$  est maximale. Etant données les propriétés de l'espace standard, il s'agit du point de la surface d'état limite le plus proche de l'origine  $O$ . En conséquence, la recherche de ce point consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\|\mathbf{u}^*\| = \min_{H(\mathbf{u}) \leq 0} \|\mathbf{u}\| \quad (\text{E.19})$$

Plusieurs algorithmes peuvent être exploités pour le résoudre. Lemaire dans [Lem05b] dresse un état de l'art des algorithmes couramment utilisés (simplex non linéaire, méthode de gradient projeté, méthode de pénalités, méthode de programmation séquentielle quadratique,...). Dans notre étude, nous avons exploité l'algorithme *iHLRF* (*improved* Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler) [ZDK95].

#### L'algorithme *iHLRF*

Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

1. Initialisation
  - Nombre d'itérations :  $i = 1$
  - Critères de convergence :  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  (*e.g.*,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ )
  - Semence  $\mathbf{x}^{[1]}$  (point de départ) : par exemple,  $\mathbf{x}^{[1]} = \boldsymbol{\mu}$ , où  $\boldsymbol{\mu}$  est le vecteur moyen.
  - $\mathbf{u}^{[1]} = \mathbf{T}(\mathbf{x}^{[1]})$ .
  - Paramètre d'échelle :  $H_0$ , (*e.g.*,  $H_0 = G(\boldsymbol{\mu})$ )
2. Calcul (dans cet ordre)
  - $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}^{[i]})$
  - $\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$  (matrice jacobienne),  $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}^{-1}$  au point  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[i]}$
  - $H(\mathbf{u}^{[i]}) = G(\mathbf{x}^{[i]})$
  - $\nabla H(\mathbf{u}^{[i]}) = \nabla G(\mathbf{x}^{[i]}) \mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}$
  - $\boldsymbol{\alpha}^{[i]} = \frac{\nabla G(\mathbf{u}^{[i]})}{\|\nabla G(\mathbf{u}^{[i]})\|}$  (vecteur des cosinus directeurs)
  - $m(\mathbf{u}^{[i]}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{[i]}\|^2 + c^{[i]} |H(\mathbf{u}^{[i]})|$ , où  $c^{[i]}$  doit être sélectionné tel que  $c^{[i]} > \frac{\|\mathbf{u}^{[i]}\|}{\|\nabla H(\mathbf{u}^{[i]})\|}$ . La fonction  $m$  est une fonction de mérite qui est utilisée pour vérifier la convergence de l'algorithme.

3. Détermination de la direction de recherche du point de conception

$$\mathbf{d}^{(i)} = \left[ -\frac{H(\mathbf{u}^{[i+1]})}{\|\nabla H(\mathbf{u}^{[i+1]})\|} + \boldsymbol{\alpha}^{[i]T} \mathbf{u}^{[i]} \right] \boldsymbol{\alpha}^{[i]} - \mathbf{u}^{[i]} \quad (\text{E.20})$$

4. Détermination de la taille du pas

$$\lambda^{[i]} = \arg \min_{\lambda \in ]0,1]} \left\{ m(\mathbf{u}^{[i]} + \lambda \mathbf{d}^{[i]}) \right\} \quad (\text{E.21})$$

A chaque itération, après avoir calculé la direction de recherche (Eq. E.20), une recherche linéaire est réalisée pour trouver le  $\lambda^{(i)}$  qui minimise la fonction de mérite. La règle d'approximation d'Armijo [Lue86] peut être exploitée à profit en raison de la non-linéarité du problème :

$$\lambda^{[i]} = \max_{k \in \mathbb{N}} \left\{ b^k \left| m(\mathbf{u}^{[i]} + b^k \mathbf{d}^{[i]}) - m(\mathbf{u}^{[i]}) \leq -ab^k \left\| \nabla m(\mathbf{u}^{[i]}) \right\|^2 \right. \right\} \quad (\text{E.22})$$

ou simplement trouver un  $\lambda^{[i]} \in ]0,1]$  tel que  $m(\mathbf{u}^{[i]} + \lambda^{[i]} \mathbf{d}^{[i]}) < m(\mathbf{u}^{[i]})$ .

5. Détermination du nouveau point d'itération

$$\mathbf{u}^{[i+1]} = \mathbf{u}^{[i]} + \lambda^{[i]} \mathbf{d}^{[i]} \quad (\text{E.23})$$

6. Vérification de la convergence

$$\begin{aligned} & - \left| H(\mathbf{u}^{[i]}) - H_0 \right| \leq \varepsilon_1 \\ & - \left\| \mathbf{u}^{[i+1]} - \boldsymbol{\alpha}^{[i]T} \mathbf{u}^{[i]} \boldsymbol{\alpha}^{[i]} \right\| \leq \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Si les règles de convergence ne sont pas vérifiées : retourner à l'étape 2 et réaliser une nouvelle itération à partir du point  $\mathbf{u}^{[i+1]}$ .

Sinon : passer à l'étape 7.

7. Solution (à la convergence) et principaux produits de l'algorithme

$$\begin{aligned} & - \text{Le point de conception } \mathbf{u}^* : \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{[i+1]}. \\ & - \text{Le vecteur des cosinus directeurs } \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} = \frac{\nabla H(\mathbf{u}^{[i+1]})}{\|\nabla H(\mathbf{u}^{[i+1]})\|}. \\ & - \text{L'indice de fiabilité (FORM) } \beta : \beta = -\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{u}^*. \end{aligned}$$

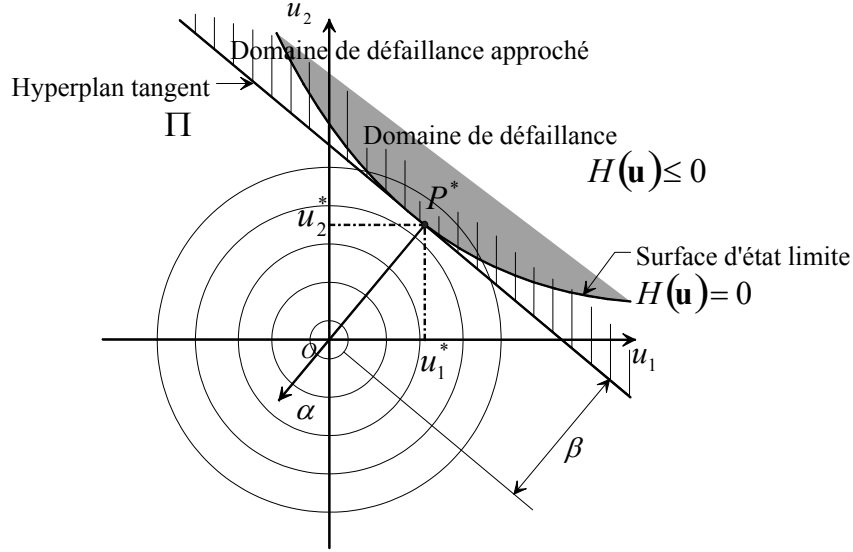
### E.2.3 FORM

L'approximation *FORM* consiste à associer à la valeur de  $\beta$ , la probabilité  $\Phi(-\beta)$ . Ceci équivaut à remplacer la surface d'état limite réelle  $H(\mathbf{u}) = 0$  par un hyperplan au point de conception  $\mathbf{u}^*$  (Fig. E.1). L'équation d'un tel hyperplan ( $\Pi$ ) est donnée par :

$$(\Pi) : \tilde{H}(\mathbf{u}) = \sum_i \alpha_i u_i + \beta \quad (\text{E.24})$$

En première approximation, c'est-à-dire quand on remplace la surface d'état limite par son hyperplan tangent au point de conception  $P^*$ , la probabilité de défaillance  $P_f$  est estimée par :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (\text{E.25})$$

FIG. E.1 – Illustration de l'approximation *FORM* dans l'espace standard.

#### E.2.4 SORM

La méthode *SORM* consiste à approcher la surface d'état limite par une surface quadratique (Fig. E.2). De manière théorique, cela revient à effectuer un développement de Taylor au deuxième ordre de la fonction de performance au point de conception  $\mathbf{u}^*$ . La probabilité de défaillance  $P_f$  est alors approchée par le contenu probabiliste de la quadrique ainsi obtenue. Dans la pratique, on évalue les courbures principales  $\kappa_i$  de cette quadrique. La probabilité du domaine de défaillance quadratique résultant est évaluée au moyen de différentes formules :

- La formule asymptotique de Breitung [Bre84] est exploitable lorsque  $\beta \rightarrow \infty$  :

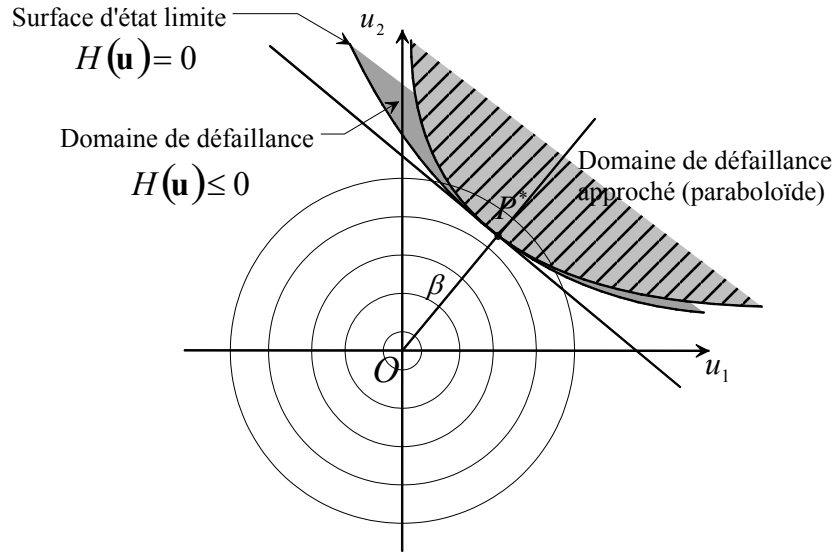
$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{E.26})$$

Dans la pratique, elle donne des résultats pertinents lorsque  $\beta$  est assez grand (*i.e.* lorsque  $\beta > 2$ ) et que  $\beta \kappa_i > -1$ . Cette approximation a d'abord été modifiée en remplaçant  $\beta$  par  $\frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)}$  [HGKR87]. Elle a ensuite été améliorée pour permettre l'estimation de  $P_f$  pour des valeurs modérées de  $\beta$  [Tve83].

- La formule de Tvedt [Tve90] fournit le résultat exact du contenu probabiliste du domaine quadratique, d'où une approximation plus fine de  $P_f$  :

$$P_f \approx \varphi(\beta) \operatorname{Re} \left\{ i \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} s^{-1} \exp \left[ \frac{(u + \beta)^2}{2} \right] \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \kappa_j s)^{-\frac{1}{2}} ds \right\}$$

où  $\operatorname{Re}$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe et  $i = \sqrt{-1}$ .

FIG. E.2 – Illustration de l'approximation *SORM* dans l'espace standard.

Il existe plusieurs approches pour la définition de la quadrique [Lem05b]. De même, différentes stratégies sont disponibles pour le calcul des courbures  $\kappa_i$ . Par exemple, la méthode la plus classique est basée sur le calcul de la matrice des dérivées secondes (usuellement appelée le Hessien) de l'état limite  $H(\mathbf{u})$  au point de conception  $\mathbf{u}^*$ . Une autre méthode consiste à définir l'approximation quadratique du domaine de défaillance par la donnée d'un ensemble de points d'ajustement sélectionnés judicieusement au voisinage du point de conception  $P^*$  [DKLH87]; on s'affranchit ainsi du calcul souvent fastidieux du Hessien.

### E.2.5 Simulation conditionnelle - Tirages d'importance

Si la correction de l'approximation *FORM/SORM* peut être réalisée au moyen de méthodes de simulation de Monte Carlo, sa validation par ce type d'approche est de toute façon nécessaire. La méthode de simulation de Monte-Carlo standard requiert un nombre important de réalisations pour obtenir la probabilité de défaillance  $P_f$  avec une bonne précision (de l'ordre de  $n+2$  à  $n+3$  tirages pour des probabilités de défaillance de l'ordre de  $10^{-n}$ ). Afin de réduire le nombre de réalisations tout en conservant une précision assez fine au niveau de l'estimation de la probabilité de défaillance, des techniques de simulation conditionnée ont été développées. En particulier, la simulation par tirages d'importance a été introduite pour générer des configurations qui conduisent plus fréquemment à la défaillance et ainsi obtenir de l'information sur le domaine de défaillance en un minimum de tirages. Cette méthode consiste à concentrer la distribution des tirages autour du point de défaillance le plus probable  $P^*$  déterminé auparavant (Fig. E.3 b.) plutôt que de choisir aléatoirement les configurations dans l'espace global (Fig. E.3 a.). Elle fournit une estimation sans biais de la probabilité de défaillance  $P_f$  dont on peut contrôler la variance.



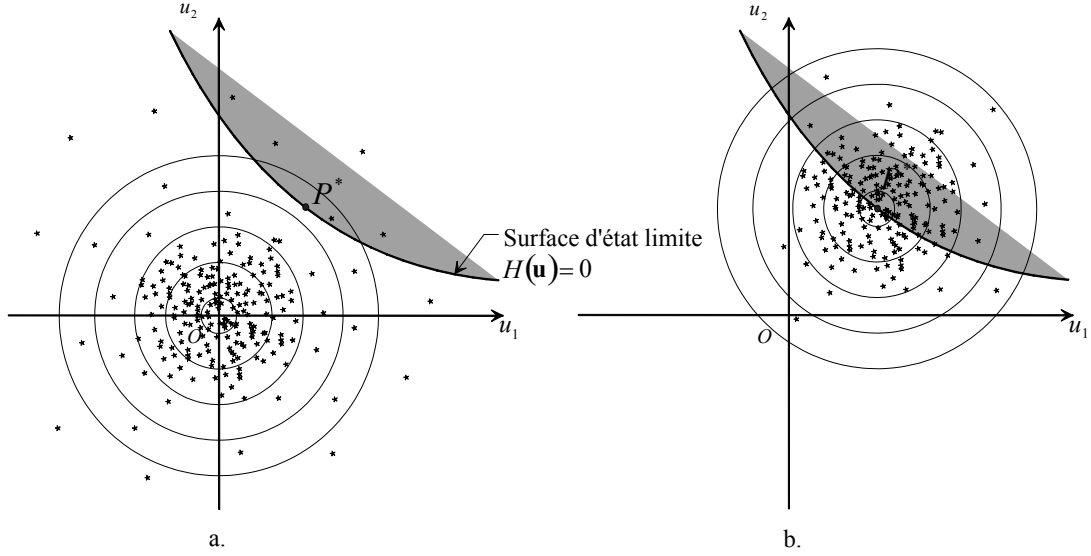


FIG. E.3 – Simulation de Monte Carlo standard et tirages d'importance.

Une fonction de densité d'importance  $\Psi(\mathbf{u})$  est d'abord introduite. Son choix est crucial. Elle est classiquement prise égale à la densité multinormale réduite centrée au point de conception  $\mathbf{u}^*$  [Mel90] :

$$\Psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2\right) \quad (\text{E.27})$$

$P_f$  s'écrit alors sous la forme :

$$P_f = \int_{H(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{u}) du_1 du_2 \dots du_n = \int_{H(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{u}) \frac{\Psi(\mathbf{u})}{\Psi(\mathbf{u})} du_1 du_2 \dots du_n \quad (\text{E.28})$$

Soit  $\mathbf{1}_{\mathcal{D}_f}$ , la fonction indicatrice du domaine de défaillance :

$$\mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} = \begin{cases} 1 & \text{si } H(\mathbf{u}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } H(\mathbf{u}) > 0 \end{cases} \quad (\text{E.29})$$

L'expression E.28 devient :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} \frac{\varphi_n(\mathbf{u})}{\Psi(\mathbf{u})} \Psi(\mathbf{u}) du_1 du_2 \dots du_n \quad (\text{E.30})$$

Elle s'interprète comme l'espérance de  $\mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} \frac{\varphi_n(\mathbf{u})}{\Psi(\mathbf{u})}$  par rapport à la densité d'importance  $\Psi(\mathbf{u})$  :

$$P_f = \mathbf{E}_{\Psi} \left[ \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} \frac{\varphi_n(\mathbf{u})}{\Psi(\mathbf{u})} \right] \quad (\text{E.31})$$

On peut évaluer cette quantité par simulation de Monte Carlo classique en utilisant  $N_s$  réalisations  $\{\tilde{\mathbf{u}}^{[i]}\}_{i=1}^{N_s}$  du vecteur aléatoire  $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \mathbf{U}^*$ , on obtient :

$$P_f = \tilde{P}_f \approx \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} \frac{\varphi_n(\tilde{\mathbf{u}}^{[i]})}{\Psi(\tilde{\mathbf{u}}^{[i]})} \quad (\text{E.32})$$

Un estimateur de la variance de  $\tilde{P}_f$  est donné par la définition habituelle :

$$\text{var}(\tilde{P}_f) = \frac{1}{N_s - 1} \left( \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} \frac{\varphi_n(\tilde{\mathbf{u}}^{[i]})}{\Psi(\tilde{\mathbf{u}}^{[i]})} \right)^2 - \tilde{P}_f^2 \right) \quad (\text{E.33})$$

Les tirages d'importance donnent des résultats satisfaisants si le point  $P^*$  a été bien identifié. Ils permettent de valider l'approximation *FORM/SORM* de la probabilité de défaillance  $P_f$  à moindre coût.

### E.3 Produits de l'analyse de fiabilité

Nous avons précédemment introduit les principaux résultats fournis par une analyse de fiabilité de type *FORM*. Elle permet :

- l'identification du point de défaillance le plus probable  $P^*$ .
- l'estimation d'un indice de fiabilité  $\beta$ .
- l'approximation de la probabilité de défaillance  $P_f$ .

L'analyse *FORM* permet également d'accéder à un certain nombre de résultats complémentaires au moyen desquels il est possible de définir plusieurs types de mesures d'importance ou de sensibilité aussi bien mécaniques que fiabilistes.

L'étude de l'importance des variables permet d'avoir une idée claire et précise sur le comportement mécano-fiabiliste du système étudié. En fait, il s'agit d'identifier les effets d'une variation de ces paramètres sur la réponse du système et sur ses défaillances potentielles. La finalité consiste à sélectionner les variables les plus significatives, ce qui permet de mieux les maîtriser selon leur rôle par rapport au comportement mécanique ou à la fiabilité. Dans la suite, on définit successivement :

- les sensibilités et les élasticités mécaniques, c'est-à-dire l'influence des paramètres  $\mathbf{X}$  sur la réponse  $M(\mathbf{X})$  du dispositif étudié ;
- les cosinus directeurs  $\alpha_i$  ;
- les sensibilités de  $\beta$  et  $P_f$  aux variables aléatoires physiques  $\mathbf{X}$  ;
- les sensibilités de  $\beta$  et  $P_f$  aux paramètres  $\boldsymbol{\theta}_f$  des lois de distributions des variables aléatoires physiques ;
- les sensibilités de  $\beta$  et  $P_f$  aux paramètres  $\boldsymbol{\theta}_G$  d'une fonction de performance  $G(\mathbf{x})$  du système mécanique ;
- les élasticités des mesures de fiabilité  $\beta$  et  $P_f$ .

#### E.3.1 Facteurs de sensibilité mécanique

Les facteurs de sensibilité mécanique mesurent la variation de la fonction de performance  $G(\mathbf{x})$  ou de la réponse  $M(\mathbf{x})$  lors de l'évolution d'une variable de conception.

Ils sont classiquement définis comme les dérivées partielles de  $G(\mathbf{x})$  ou de  $M(\mathbf{x})$  par rapport aux variables  $x_i$  :

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \nabla_i G(\mathbf{x}) \quad (\text{E.34})$$

$$\frac{\partial M(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \nabla_i M(\mathbf{x}) \quad (\text{E.35})$$

Dans la pratique, l'analyse de sensibilité mécanique est effectuée en certaines valeurs représentatives  $\mathbf{x}_r$ , valeurs de travail de l'ingénieur. En outre, afin de pouvoir comparer de manière pertinente l'effet des différents paramètres, on leur préfère les mesures normées, sans dimension suivantes :

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{x_i}{G(\mathbf{x})} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} \quad (\text{E.36})$$

$$\left. \frac{\partial M(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{x_i}{M(\mathbf{x})} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} \quad (\text{E.37})$$

Elles sont dénommées élasticités mécaniques. Ces facteurs permettent de distinguer les variables de sollicitation des variables de résistance par le signe de l'élasticité. Elles assurent également l'identification des variables dont l'influence est amplifiée ou atténuée lors de la transformation mécanique.

Cependant, il faut être vigilant lorsque ces mesures sont utilisées dans un contexte fiabiliste. En effet, les variables peuvent avoir une influence mécanique minimale mais présenter une grande dispersion probabiliste. Malgré l'effet modéré sur la réponse ou sur la fonction de performance, la variabilité du paramètre peut être une cause essentielle de défaillance. Il est donc nécessaire d'exploiter d'autres mesures complémentaires et plus appropriées.

### E.3.2 Cosinus directeurs

Les cosinus directeurs, notés  $\alpha_i$ , représentent les sensibilités de l'indice de fiabilité  $\beta$  dans l'espace normal standard vis-à-vis de chacune des variables aléatoires. Pour la variable aléatoire  $U_i$ , le cosinus directeur  $\alpha_i$  est donné par :

$$\alpha_i = \left. \frac{\nabla_i H(\mathbf{u})}{\|\nabla H(\mathbf{u})\|} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.38})$$

où on rappelle que :

- $\mathbf{u}^*$  est le vecteur des coordonnées du point de défaillance le plus probable dans l'espace normal standard.
- $H(\mathbf{u})$  est l'expression dans ce même espace normal standard de la fonction de performance  $G(\mathbf{x})$  considérée.
- $\nabla H(\mathbf{u})$  est le gradient de la fonction de performance dans l'espace normal standard et  $\|\nabla H(\mathbf{u})\|$  sa norme.

Les cosinus directeurs sont reliés à l'indice de fiabilité  $\beta$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{u_i^*}{\beta} \\ \beta &= -\sum_i \alpha_i u_i^* \\ \left. \frac{\partial \beta}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}^*} &= -\alpha_i\end{aligned}\tag{E.39}$$

Ils sont obtenus classiquement au cours de la caractérisation du point de conception  $\mathbf{u}^*$  par la méthode *FORM* et ils vérifient la relation :

$$\sum_i \alpha_i^2 = 1\tag{E.40}$$

Ils traduisent l'effet d'une variation unitaire des variables  $u_i$  sur la valeur de l'indice de fiabilité  $\beta$ .

### E.3.3 Sensibilité de $\beta$ aux variables aléatoires physiques $\mathbf{X}$

La connaissance des cosinus directeurs  $\alpha_i$  et de la transformation isoprobabiliste  $\mathbf{u} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$  permet l'évaluation des sensibilités de l'indice de fiabilité  $\beta$  aux variables physiques  $\partial\beta/\partial x_i$ . Elles sont données par la relation :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \left. \frac{\partial \beta}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{u}^*} = -\sum_j \alpha_j \left. \frac{\partial T_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{u}^*}\tag{E.41}$$

Le poids des variables peut changer de manière significative quand on passe à l'espace physique en raison de l'impact des gradients de la transformation isoprobabiliste. Le rôle des distributions et des corrélations peut amplifier l'influence de certaines variables. Ils traduisent l'effet d'une variation unitaire des variables physiques  $x_i$  sur la valeur de l'indice de fiabilité  $\beta$ .

### E.3.4 Sensibilité de $\beta$ aux paramètres $\theta_f$ des lois des $X_i$

#### Définition générale

Le calcul des sensibilités de  $\beta$  par rapport à des paramètres  $\theta_f$  intervenant dans les lois de distribution des variables d'entrée du problème (moyennes, écarts-types,...) permet d'identifier les mesures qu'il faut prendre pour assurer un dimensionnement fiable (sensibilité aux moyennes) ou pour orienter si possible le contrôle qualité (sensibilité aux coefficients de variation).

Soit  $\theta_{f_i}^\gamma$  le  $\gamma^{\text{ème}}$  paramètre de la loi de la variable  $X_i$ . L'effet de sa variation sur la fiabilité est défini par :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*}\tag{E.42}$$

En exprimant  $\beta$  en fonction des variables  $u_j$ , il vient :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \left. \frac{\partial \beta}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.43})$$

et en exploitant l'égalité  $\partial \beta / \partial u_j = -\alpha_j = u_j^* / \beta$  (Eq. E.39), l'expression de la sensibilité de  $\beta$  par rapport au paramètre  $\theta_{f_i}^\gamma$  devient :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \left. \frac{u_j^*}{\beta} \frac{\partial u_j}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \left. \frac{u_j^*}{\beta} \frac{\partial T_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.44})$$

ce qui a pour intérêt de faire apparaître la transformation isoprobabiliste  $\mathbf{T}$  qui dépend des paramètres  $\boldsymbol{\theta}_f$ . Deux cas particuliers permettent de poursuivre le calcul : le cas des variables  $\mathbf{X}$  indépendantes et le cas des variables  $\mathbf{X}$  corrélées.

### Cas des variables indépendantes

Lorsque les variables  $\mathbf{X}$  sont indépendantes, les quantités  $\partial u_j / \partial \theta_{f_i}^\gamma$  sont nulles pour  $i \neq j$  et la transformation isoprobabiliste  $\mathbf{T}$  se déduit simplement de :

$$\Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i, \boldsymbol{\theta}_{f_i}) \rightarrow u_i = T_i(x_i, \boldsymbol{\theta}_{f_i}) \quad (\text{E.45})$$

où  $\Phi$  est la fonction de distribution normale standard et  $F_{X_i}$  la fonction de distribution de la variable aléatoire  $X_i$ . Par différenciation par rapport à  $\theta_{f_i}^\gamma$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(u_i)}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} &= \frac{\partial F_{X_i}(x_i, \boldsymbol{\theta}_{f_i})}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} = \varphi(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} &= \frac{1}{\varphi(u_i)} \frac{\partial F_{X_i}(x_i, \boldsymbol{\theta}_{f_i})}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \end{aligned}$$

où  $\varphi$  est la fonction de densité normale standard. Finalement, en remplaçant dans l'équation E.44, on a :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \frac{u_j^*}{\beta} \frac{1}{\varphi(u_i)} \frac{\partial F_{X_i}(x_i^*, \boldsymbol{\theta}_{f_i})}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \quad (\text{E.46})$$

où  $x_i^*$  est défini par  $\Phi(u_i^*) = F_{X_i}(x_i^*, \boldsymbol{\theta}_{f_i})$

### Cas des variables corrélées

Le calcul devient plus technique. En s'appuyant sur la transformation de Nataf (Eq. E.18), les sensibilités sont calculées de la manière suivante :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \left. \frac{\partial \beta}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \left. \frac{u_j^*}{\beta} \frac{\partial}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \left( \sum_k \Gamma_{0,jk} \hat{u}_k \right) \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.47})$$

Dans ce cas général, il faut utiliser le calcul de la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{u}\theta_f} = \left[ \partial u_j / \partial \theta_{f_i}^\gamma \right]$  évaluée au point de conception  $\mathbf{u}^*$ .

Si  $\Gamma_{0,jk}$  ne contient pas le paramètre  $\theta_{f_i}^\gamma$ , on a :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \frac{u_j^*}{\beta} \sum_k \Gamma_{0,jk} \left. \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.48})$$

Si  $\partial \hat{u}_k / \partial \theta_{f_i}^\gamma = 0$  pour  $k \neq i$  :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \frac{u_j^*}{\beta} \sum_k \Gamma_{0,jk} \left. \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \right|_{\mathbf{u}^*} = \sum_j \frac{u_j^*}{\beta} \Gamma_{0,ji} \frac{1}{\phi(\hat{u}_i^*)} \frac{\partial F_{X_i}(x_i^*, \theta_{f_i})}{\partial \theta_{f_i}^\gamma} \quad (\text{E.49})$$

### Illustration - loi normale

On considère l'exemple d'une variable indépendante de loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , la transformation isoprobabiliste s'écrit :

$$u_i = T_i(x_i, \theta_{f_i}) = \frac{x_i - m}{\sigma} \quad \text{et} \quad x_i = m + \sigma u_i \quad (\text{E.50})$$

La sensibilité par rapport à la moyenne est alors, d'après l'équation E.44 :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^m} \right| = -\frac{1}{\sigma} \frac{u_i^*}{\beta} \quad (\text{E.51})$$

et par rapport à l'écart-type :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{f_i}^\sigma} \right| = -\frac{(x_i^* - m)}{\sigma^2} \frac{u_i^*}{\beta} = -\frac{u_i^{*2}}{\sigma \beta} \quad (\text{E.52})$$

Ces résultats sont également obtenus à partir de l'équation E.46 en remarquant que  $F_{X_i} = \Phi((x_i - m)/\sigma)$ .

### E.3.5 Sensibilité de $\beta$ aux paramètres $\theta_G$ de $G(\mathbf{x})$

On s'intéresse ici à l'évolution du point de conception et de l'indice de fiabilité  $\beta$  lors de la variation de paramètres  $\theta_G$  intervenant dans la définition de la fonction d'état limite  $G(\mathbf{x})$  (*i.e.* de la transformation mécanique). Le point de conception  $\mathbf{X}^*$  devant par définition rester sur l'état limite, la dérivée totale par rapport à chacun des paramètres  $\theta_{G_i}$  est toujours nulle :

$$\left. \frac{dG(\mathbf{x}, \theta_G)}{d\theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} \equiv \left. \frac{dH(\mathbf{u}, \theta_G)}{d\theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} = \frac{\partial H(\mathbf{u}, \theta_G)}{\partial \theta_{G_i}} + \sum_j \frac{\partial H(\mathbf{u}, \theta_G)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \theta_{G_i}} \Big|_{\mathbf{u}^*} = 0 \quad (\text{E.53})$$

En divisant cette expression par la norme du vecteur gradient, on obtient :

$$\frac{1}{\|\nabla H(\mathbf{u}, \theta_G)\|} \left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, \theta_G)}{\partial \theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} + \sum_j \alpha_j \left. \frac{\partial u_j}{\partial \theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} = 0 \quad (\text{E.54})$$

Dans [Lem05b], on montre que :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} = - \sum_j \alpha_j \left. \frac{\partial u_j}{\partial \theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.55})$$

En reportant dans l'expression E.54, on obtient l'expression générale de la sensibilité de  $\beta$  aux paramètres  $\boldsymbol{\theta}_G$  de la fonction de performance :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} = \frac{1}{\|\nabla H(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_G)\|} \left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_G)}{\partial \theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.56})$$

### E.3.6 Sensibilité de la probabilité de défaillance $P_f$

En admettant une approximation du premier ordre de la probabilité de défaillance  $P_f$ , il vient classiquement :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (\text{E.57})$$

La variation de  $P_f$  par rapport à un paramètre quelconque  $\theta_i$  est alors donnée par :

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial \theta_i} \right|_{\mathbf{u}^*} = -\varphi(\beta) \left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.58})$$

### E.3.7 Elasticités des mesures de fiabilité $\beta$ et $P_f$

Les valeurs des sensibilités définies précédemment ne sont pas directement exploitables pour la comparaison des variables et des paramètres. Pour remédier à ce problème, les sensibilités doivent être normalisées pour obtenir les élasticités :

$$e_{\theta_i}^\beta = \frac{\theta_i}{\beta} \left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_{G_i}} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (\text{E.59})$$

En reprenant l'exemple de la loi normale, l'élasticité par rapport à la moyenne est :

$$e_m^\beta = -\frac{1}{\sigma} \frac{u_i^*}{\beta} \frac{m}{\beta} = \frac{\alpha_i m}{\beta \sigma} \quad (\text{E.60})$$

Par rapport à l'écart-type, on a :

$$e_\sigma^\beta = -\frac{1}{\sigma} \frac{u_i^*}{\beta} \frac{\sigma}{\beta} = -\alpha_i^2 \quad (\text{E.61})$$

## E.4 Conclusion

Les méthodes classiques d'analyse de fiabilité des structures permettent l'évaluation d'indices de fiabilité et de probabilités de défaillance relatifs à des critères de défaillance ou de performance. Elles fournissent également un ensemble de facteurs d'importance qui représentent les poids des paramètres de conception dans la réalisation physique du système analysé et dans sa fiabilité. Ceux-ci peuvent être exploités par le concepteur afin d'optimiser le dimensionnement du système.

Les techniques qui ont été présentées, ici, sont celles qui ont principalement été utilisées pour la mise en œuvre de la démarche mécano-probabiliste en conception fiable introduite et discutée dans ce mémoire de thèse. Elles ont également toutes fait l'objet d'une implémentation spécifique au sein du logiciel de calcul *RELAB* (Chapitre 9), support de la méthodologie proposée dans le cadre de nos travaux de thèse.



---

## **Approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité**

### **Application au développement de systèmes mécaniques de l'automobile**

Une démarche globale pour l'estimation et l'élaboration de la fiabilité de systèmes mécaniques aux différentes étapes de leur processus de conception est proposée. Elle repose sur une approche multidisciplinaire exploitant une représentation système, physique et probabiliste des scénarios de défaillance. Combinant leurs interprétations *système sans physique* et *physique sans système*, elle assure la construction de modèles de fiabilité à la fois *physiques et systèmes*. Plusieurs stratégies d'évaluation sont alors déployées. Utilisant les outils du couplage mécano-fiabiliste (e.g. chaos polynomial, FORM/SORM), elles fournissent des mesures de fiabilité traditionnelles et permettent également la définition de chaînes de mesures d'importance originales. Celles-ci détaillent le poids et l'influence de chaque scénario et de chacun de leurs paramètres sur la réalisation des défaillances. L'optimisation de la conception est alors en partie assurée par l'analyse de fiabilité elle-même.

---

*Mots-clés* : Conception pour la fiabilité, Fiabilité système, Fiabilité mécanique, Physique de défaillance, Couplage mécano-fiabiliste, Propagation des incertitudes, Chaos polynomial, *FORM/SORM*, Sécurité de fonctionnement.

---

## **Mechanical design for reliability using a system and probabilistic physical-based approach**

### **Application to the design of automotive mechanical systems**

A framework is proposed for assessing and enhancing the reliability of mechanical systems at different stages of their design process. A multi-discipline viewpoint is adopted to develop an approach based on an evolutive system representation that benefit from comprehensive probabilistic and physical modeling of the failure scenarios. *System without physics* reliability interpretations and *physical without system* reliability representations are unified to build original *physical and system* reliability models. Several evaluation strategies are developed. Based on original shortcut polynomial chaos and FORM/SORM analyses, they yield traditional reliability measures. They also participate in the definition of chains of importance factors that detail the weight of each failure scenario and associated parameters with respect to the considered failure modes. Design optimisation for reliability is then partially ensured by this particular reliability analysis.

---

*Keywords*: Design for reliability, System reliability, Mechanical reliability, Physics-of-failure modeling, Uncertainty propagation, Polynomial chaos, FORM/SORM, RAMS.